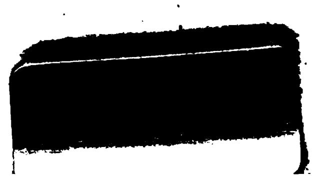






manque le t.


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. Étienne BÉZOUT, de l'Académie des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves & des Aspirans du Corps de l'Artillerie, & Censeur de Livres.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.



A PARIS,

Chez { RICHARD, Libraire, rue de la Harpe, N°. 188, vis-à-vis la rue Severin.
CAILLE, Libraire, rue Serpente, N°. 7.

1798, v. st. AN VI.

EXPOSITION

ABRÉGÉE

DU NOUVEAU SYSTÊME DES POIDS ET MESURES,

D'après le Mètre définitif, pour servir de supplément au Cours de Mathématiques de BÉZOUT.

A l'usage de l'ARTILLERIE et de la MARINE.

Edition de RICHARD, CAILLE et RAVIER, *formant 10 vol. in-8°. grand raisin.*

PAR le Citoyen GUILLARD.

I.

MESURES LINÉAIRES.

LE MÈTRE.

ON appelle *Mètre*, la dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur, comptée sur le méridien qui passe à Paris.

L'astronome Lacaille a trouvé que la longueur du 45e degré de latitude étoit de 57027 toises.

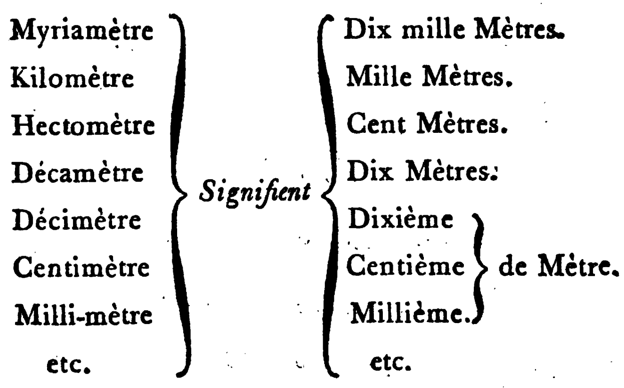
Multipliant ce nombre par 90, on a pour produit 5132430$^{t.}$, qui exprime la distance du pôle à l'équateur. Divisant par 10000000, on a 0$^{t.}$,5132430. Si on multiplie ensuite cette quantité par 6 pour avoir les pieds, puis par 12 les chiffres décimaux qui résultent de la multiplication, pour avoir les pouces, et ainsi de suite, on trouve que la dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre est de 3$^{pi.}$ 0$^{po.}$ 11$^{l.}$, 44. C'est cette valeur qu'on avoit adoptée pour mètre provisoire.

Mais d'après les calculs duement vérifiés des citoyens de Lambre et Méchain, la distance du pôle à l'équateur est de 5130740$^{t.}$ Le mètre qui en est la dix-millionième partie sera 0$^{t.}$5130740, qui correspond à 3$^{pi.}$ 0$^{po.}$ 11$^{l.}$,296. Le mètre définitif est donc de 3$^{pi.}$ 11$^{l.}$, 296; il est à-peu-près de $\frac{1}{7}$ plus court que le mètre provisoire. Cette différence, quoique fort petite, produit des changemens dans les autres parties du système métrique, et nous remarquerons qu'ils sont sur-tout sensibles dans les nouveaux poids. Le public nous saura donc bon gré d'avoir attendu, pour réaliser notre promesse à son égard, que les travaux relatifs à la nouvelle mesure de l'arc du méridien fussent entièrement terminés, et que la commission des savans nommés à cet effet, eût invariablement fixé l'unité de longueur. Ils verront de plus, dans cet exposé succinct, que les

calculs y sont présentés avec un plus grand nombre de décimales, et par conséquent avec plus d'exactitude, qu'on ne l'a fait dans la plupart des ouvrages qui ont paru jusqu'à ce jour sur cette matière.

Pour composer des mesures plus grandes ou plus petites que le mètre, on se sert des mots *myria*, *kilo*, *hecto*, *déca*, *déci*, *centi*, *milli*, etc. tirés du grec et du latin; ils sont applicables à presque toutes les autres unités dont nous parlerons, et désignent respectivement des dixaines de mille, des mille, des centaines, des dixaines, des dixièmes, des centièmes, des millièmes, etc.......

Ainsi,



Myriamètre	*Signifient*	Dix mille Mètres.
Kilomètre		Mille Mètres.
Hectomètre		Cent Mètres.
Décamètre		Dix Mètres.
Décimètre		Dixième de Mètre.
Centimètre		Centième de Mètre.
Milli-mètre		Millième de Mètre.
etc.		etc.

Il n'y a que deux questions à résoudre sur les nouveaux poids et mesures, savoir; comment peut-on transformer les anciennes unités en nouvelles, et ramener les nouvelles aux anciennes?

Or il est clair, que pour parvenir à cette double solution, il suffit d'établir le rapport de l'ancienne mesure à la nouvelle, et réciproquement; c'est aussi la marche que nous suivrons. Commençons donc par le Mètre.

Puisque l'unité de toise étant représentée par 1, le mètre vaut $0^{t.},5130740$, la fraction $\frac{1}{0,5130740} =$ 1,949037 exprimera nécessairement le rapport de la toise au mètre, ou combien la toise vaut de mètres. Donc,

1 toise. .	*vaut* . .	$1^{\text{mètr.}},949037$.
1 pied. .	. .	0 ,3248395.
1 pouce.	. .	0 ,0270699.
1 ligne. .	. .	0 0022558.

APPLICATIONS.

EXEMPLE I.

Trouver le rapport de l'Aune de Paris au Mètre.

SOLUTION. L'aune de Paris valant $3^{pi.}\ 7^{po.}\ 10^{l.}\ \frac{5}{6}$,

Pour 3 pieds	*on prendra*	3 fois 0,3248395.
Pour 7 pouces		7 fois 0,0270699.
Pour 10 lignes		10 fois 0,0022558.
Pour $\frac{5}{6}$ de ligne		les $\frac{5}{6}$ de 0,0022558.

Le calcul achevé, on trouve 1,18845. Donc l'aune de Paris vaut $1^{\text{mètre}},18845$.

EXEMPLE II.

Évaluer en Mètres la Lieue terrestre.

SOLUTION. La lieue terrestre (de 25 au degré) étant de 2280$^{t.}$ 2$^{pi.}$, on multipliera par 2280, le rapport connu de la toise au mètre, et par 2, celui du pied au mètre, et on obtiendra 4444$^{mèt.}$,44 : en suivant un procédé semblable, on trouvera pour les diverses distances itinéraires, les valeurs suivantes.

La lieue terrestre (2280$^{t.}$ 2$^{pi.}$)	valent	4444$^{mèt.}$,44
La lieue marine (2850 $\frac{4}{10}$)		5555 ,56.
La lieue moyenne (2565 $\frac{4}{10}$)		5000 = 5kil.
Le degré moyen (57008)		111111.

Nota. Nous ne parlerons à l'avenir que de la lieue terrestre.

Quant au rapport du mètre à la toise, nous l'avons déjà ; c'est le nombre 0$^{t.}$,5130740. Qu'on le multiplie par 6, puis le produit par 12, etc., on aura la valeur du mètre en toises, pieds, pouces, lignes. Si enfin on veut avoir l'expression des parties décuples et sous-décuples du mètre, il suffira de placer la virgule convenablement. On formera donc sans peine le tableau qui suit :

Le mètre vaut	en toises	0$^{t.}$,5130740.
	en pieds	3$^{pi.}$,078444.
	en pouces	36$^{po.}$,941328.
	en lignes	443$^{l.}$,29606.

Le décamètre vaut	en toises $5^{t.},13074$.
	en pieds $30^{pi.},7844$.
L'hectomètre vaut	en toises $51^{t.},3074$.
	en pieds $307^{pi.},844$.
Le kilomètre vaut	$513^{t.},074$.
Le miriamètre vaut	$5130^{t.},74$
	ou $2^{lie.},25$.

Le décimètre vaut	en pouces $3^{po.},694133$.
	en lignes $44^{li.},3296$.
Le centimètre vaut	$4^{li.},43296$.

Le rapport du mètre à l'aune sera $\frac{1}{1,18845} = 0,84143$.

Donc le mètre vaut 0,8414 (aunes de Paris) = $\frac{5}{6}$ d'aunes à-peu-près.

I I.

MESURES DE SUPERFICIE.

Le Mètre quarré.

1°. Pour évaluer le rapport des anciennes mesures de superficie aux nouvelles, j'observe que la toise valant $1^{mèt.},949037$, si on multiplie ce nombre par lui-même, on aura 3,798745, en ne

conservant que 6 décimales au produit. Donc la toise quarrée vaut $3^{\text{mèt. q.}},798745$. Prenant aussi le quarré de 0,3248395, valeur du pied linéaire en mètre, le résultat 0,1055207 indique que le pied quarré vaut $0^{\text{mét. q.}},1055207$; agissant de même pour obtenir la valeur du pouce quarré et de la ligne quarrée, on aura les quatre expressions suivantes :

La toise quarrée. . . *vaut*	$3^{\text{mèt. q.}}$	,798745.
Le pied quarré. . . .	0	,105521.
Le pouce quarré. . .	0	,0007328.
La ligne quarrée. . .	0	,000005089.

On trouvera facilement que la perche quarrée (eaux et forêts) de 484 pieds quarrés, la perche linéaire étant de 22 pieds, vaut $51^{\text{mèt. q.}},072$.

L'arpent (eaux et forêts) de 100 perches quarées	5107	,202.
La perche quarrée de Paris (de 324 pi. q.) la perch. linéaire étant de 18 pi.	34	,1887.
L'arpent de Paris, de 100 perches quarrées, . . .	3418	,8706.

La lieue quarrée vaut 19753086 mèt. quar.

100 ares, et le myriare qui en vaut 10000, sont deux multiples de l'are, qui forment des quarrés parfaits; il n'en est pas de même du *décare* et du *kilare*, puisqu'on ne saurait extraire exactement la racine quarrée de 10, ni de 1000.

Puisque la perche quarrée (eaux et forêts) vaut $51^{m.q.},072$, la fraction $\frac{51,072}{100} = 0,51072$ exprimera le rapport de la perche quarrée à l'are. De même, en divisant par 100 le nombre 34,1887, qui représente la valeur de la perche quarrée de Paris en mètres quarrés, le quotient 0,341887 exprime la relation de la perche quarrée de Paris à l'are. On peut donc conclure que:

La perche quar. (*e.* et *f.*) *vaut*	$0^{a.}$	,51072.
L'arpent (*idem.*).	51	,07202.
La perche quar. de Paris.	0	,341887.
L'arpent (*idem.*)	34	,1887.
La lieue quarrée.	197530	,86.

APPLICATION. *Réduire 2324 arpens* (e. *et* for.) *13 perches quarrées, en ares et parties décimales de l'are.*

SOLUTION. On multipliera 51,07202 par 2324.
0,51072 par 13.

et on aura, en ajoutant les deux produits partiels, $118698^{a}.,014$, ou 1186 hect., 98 ares, 1 centiare, pour valeur de 2324 arpens 13 perches quarrées.

Actuellement, si nous divisons 100 mètres quarrés par $51^{\text{mètres quarrés}},07202$, nous aurons pour quotient 1,95802 : donc l'are vaut en perches quarrées (eaux et forêts), 195802; divisons pareillement le nombre 100 par 34,1887, le quotient nous apprendra que l'are vaut 2,92494 (perches quarrées de Paris).

Il sera facile de former la table suivante :

L'are vaut	en toises quarrées 26,32449.
	en pieds quarrés 947,6816.
	en pouces quarrés 136466,2.
L'hectare vaut	en arp. (e. et f.) $1^{\text{arp.}},95802$.
	en perc. q. (*Id.*) $195^{\text{p. q.}},802$.
	en arpents de Paris 2,92494.
	en perch. quar. (*Id.*) 292,494.
	en toises quarrées 2632,449.
Le myriare vaut	en lieues quar. 0,050625.
	en arp. (eaux et for.) 195,80.
	en arp. de Paris. 292,49.

Nota. Puisque la lieue quarrée vaut 197530 ares,86, il suffira de diviser 1 par ce nombre : le quotient sera 0,0000050625 ; c'est la valeur de l'are en lieues quarrées. Multipliant ensuite par 10000, on a 0,050625, comme nous l'avons annoncé.

I V.

MESURE DES SOLIDES.

Le Stère.

Le stère pour les bois de chauffage, est un mètre cube; donc une toise valant $1^{\text{mèt.}},949037$, si on cube ce nombre, on trouvera $7^{\text{m. c.}},40389$ pour valeur d'une toise cube. Pareillement, un pied linéaire étant égal à $0^{\text{mèt.}},324839$, le pied cube vaudra $0^{\text{mèt. c.}},0342773$; élevant de même au cube chacune des valeurs linéaires que nous avons déjà, on obtiendra avec un peu d'attention les expressions qui suivent :

1 toise cube vaut..	$7^{\text{mèt. c.}}$	,40389.
1 pied cube......	0	,034277.
1 pouc. cube......	0	,00001983.
1 ligne cube......	0	,00000001148.
La voie de bois (de 56 pi. cub.).............	1	,91953.
La corde (double de la voie)............	3	,8391.
La solive (charpente) de 3 pieds cub.........	0	,1028.

Réciproquement, pour trouver le rapport du mètre cube à la toise cube, il faudra diviser 1

par 7,40389 ; et en général, si l'on divise 1 par chacun des nombres contenus dans le tableau précédent, on pourra former le suivant, savoir :

Le mèt. cub. vaut	en toises cub.	0,135064.
	en pieds cub.	29,17387.
	en pouces cub.	50412,44.
	en solives.	9,7246.
	en voie de bois.	0,52096.

Le décimètre cube vaut (*en plaçant la virgule convenablement.*)	en to. cub.	0,000135o6.
	en pi. cub.	0,0291739.
	en po. cub.	50,41244.
	en lig. cub.	87112,7.
	en solives.	0,0097.

Le centi-mètre cube vaut	en po. cub.	0,05041.
	en lig. cub.	87,113.

Il est inutile d'observer, qu'en multipliant 0,135064 par 216 cube de 6, et le produit par 1728 cube de 12, on eût également obtenu la valeur du mètre cube en pieds, pouces-cubes, etc.

V.

MESURES DE CAPACITÉ.

Le Litre.

Un déci-mètre cube donne une capacité qu'on appelle *Litre*. Cette mesure remplace le litron et la pinte. Or un décimètre cube étant la millième partie du mètre cube (car deux solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues) , si l'on se rappelle qu'un mètre cube vaut $50412^{\text{pouces cubes}},44$, on aura $05^{\text{pouces cubes}},41244$ pour valeur du *litre*. Mais le litron de Paris est de $40^{\text{pouces cubes}}986$; donc, divisant 40,986 par 50,41244, le quotient 0,81302 exprimera le rapport du litron au litre. Ainsi :

Le litron vaut	$0^{\text{litre}},81302$.			
Le boisseau (de 16 litrons).	13	,0083	=	$1^{\text{décal.}}3008$.
Le septier de bled (de 12 boiss.)	156	,0996	=	$1^{\text{hecto.}},561$.
Le muid de bled (de 12 sept.)	1873	,195	=	$1^{\text{kiloli.}},873195$.

Quant à la pinte de Paris, qui contient... 46^pouces cubes^,95, si l'on divise ce nombre par 50,41244, on trouvera pour quotient 0,93132, ce qui signifie que

La pinte de Paris *vaut*	0^litres^	,93132.
Donc la velte (de 8 pin.) *vaudra*	7	,45056.
Le muid de vin (de 288 pin.)..	268	,2202.
	ou 2^hecto.^68^lit.^	

Calculons à présent le rapport du litre au litron et à la pinte. Le premier est contenu dans la fraction $\frac{50,41244}{40,986} = 1,2299$. De-là naissent les résultats suivans :

Le litre.... *vaut*	1^litron^	,2299	= 1 litron. $\frac{1}{4}$.
Le décalitre....	12	,299	
L'hectolitre.....	123		= 7 boiss. 11 litrons.
Le kilolitre....	1230		= 6 septi. 5 boiss.
Le myrialitre...	12299		= 5 muids 4 septiers.
Le décilitre		0,1230	= $\frac{1}{8}$ de litr.

En second lieu, le rapport du litre à la pinte dépend du quotient de 50,41244 (nombre de pouces cubes du litre) par 46,95 nombre de pouces cubes de la pinte ; or comme on trouve

pour résultat 1, 07375, il faut en conclure que

Le litre	*vaut*	1,pin.	07375	= 1 pinte $\frac{1}{14}$.
Le décalitre		10	,7375	= 1 velte, 2 pintes, 74.
L'hectolitre		107	,375	= 13 velt. 3 pint. $\frac{1}{3}$.
Le kilolitre		1073	,75	= 3 mui. 26 vel. 1 pin. $\frac{3}{4}$.
Le myrialitre		10737	,5	= 37 mui., 10 velt. 1 pin. $\frac{1}{2}$.

Remarque. On trouvera une différence réelle entre les résultats précédens et ceux des autres tableaux comparatifs qui ont paru en l'an 7 et années antérieures. En voici la raison, on a supposé dans ces divers calculs, que le litron de Paris étoit de 40 pouces cubes, tandis qu'il en vaut 40,986. On avoit cru aussi que la pinte de Paris étoit de 48 pouces cubes, et cependant elle n'en vaut que 46,95. Les valeurs, au contraire, que nous avons ici adoptées pour bases de nos calculs, ne peuvent être affectées de la même erreur, puisqu'elles sont extraites du rapport fait par les citoyens commissaires Le Gendre, Duport, et autres géomètres distingués, qui, en vertu d'un arrêté du directoire exécutif, ont été chargés, conjointement avec l'administration centrale, de vérifier les étalons du département de la Seine, relativement aux anciennes mesures de capacité.

V I.

NOUVEAUX POIDS.

Le Gramme.

On appelle ainsi un poids égal au poids d'un centi-mètre cube d'eau pure. Des expériences réitérées, ont prouvé que le gramme pèse .... $18^{grains},82715$. D'après l'ancien mètre, le poids du gramme avoit été trouvé de $18^{grains},841$. Divisons 9216 grains que contient la livre, par $18^{grains},82715$, valeur du gramme; nous aurons pour quotient 489,509. C'est-là le rapport de la livre au gramme.

Ainsi la livre . . . vaut	$489^{gram.}$	,509.
le marc.	244	,754.
l'once.	30	,594.
le gros.	3	,824.
le grain	0	,053.

Il faudra, au contraire, diviser 18,82715 par 9216, pour avoir le rapport du gramme à la livre. Le résultat de la division, est le nombre

0,0020429; si on a l'attention de le multiplier par 2, 8, etc., on verra que :

Le gramme vaut	en livres	0,0020429.
	en marcs	0,004086.
	en onces	0,032686.
	en gros	0,26149.
Le décagramme vaut	en livres	0,020429.
	en marcs	0,04086.
	en onces	0,3269.
	en gros	2,6149.
L'hectogramme vaut	en onces	3,2686.
	en gros	26,1487.
Le kylogramme vaut	en livres	2,04286.
	en onces	32,6858.
	ou 2 liv. 5 gros. 35 grains.	
Le Myriagramme vaut	20 liv.,4286	
	ou 20 liv. 6 onc. 6 gros.	

Le décigramme vaut 1 grains.,8827.

Le centigramme vaut 0 grains.,18827.

On observera que, d'après le mètre provisoire, le kilogramme étoit du poids de 18841 grains, c'est-à-dire de 2 livres, 0 once, 5 gros, 49 grains;

tandis que, d'après le mètre définitif, il ne vaut que 2 livres, 5 gros, 35 grains. Il y a donc une différence de 14 grains, et on sent combien elle est considérable dans les matières d'or et d'argent.

VII.

NOUVELLE DIVISION DU CERCLE.

Concevons le quart du cercle partagé en 100 parties ; chacune s'appelle *grade;* et si chaque grade lui-même est divisé en 100 parties, le quart du cercle sera composé de 10000 parties, ou de 100 centigrades, et ainsi de suite. Cela posé :

1°. Le rapport du degré au grade, sera renfermé dans une fraction, qui aura pour numérateur $\frac{1}{360}$, et pour dénominateur $\frac{1}{400}$; ou, ne prenant que le quart du cercle, $\frac{1}{90}$ divisé par $\frac{1}{100}$, exprimera également la relation du degré au grade. Or, comme le quotient de la division se trouve être 1,111111, il s'ensuit que ;

Le degré (anc. quart de cercle) vaut	1 grade	,111111.
La minute (en divisant par 60) . .	0	,01852.
La seconde (*idem*)	0	,000308.

2°. Le rapport du grade au degré, sera . . . $\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{90}} = \frac{9}{10}$; multipliant 9 par 60, pour avoir les

minutes, et divisant le produit par 10, on trouve 0°, 54′. Donc

Le grade *vaut*. . . . . . 0°. 54′.
Le décigrade . . . . 0°. 5′, 24″.
Le centigrade . . . . . . 0. 0′, 32″, 4.
etc.

EXEMPLE. On propose de réduire en grades 24°, 51′, 32″, 7 ?

Solution.

On multipliera. { 1,111111 par 24.
0,01852. . . 51.
0,000308. . . 32.
0,000308. . . 0,7.

On aura pour produit total 27,62. Donc 24°, 51′, 32″, 7, valent 27 grades 62 centigrades.

On voit qu'il ne seroit pas plus difficile de transformer en degrés un nombre quelconque de grades et de centigrades. Nous pouvons donc nous dispenser d'en faire une application. Remarquons seulement, que cette nouvelle division du cercle, pour être d'une utilité immédiate dans la pratique, nécessite un changement dans les tables trigonométriques. Les mathématiciens l'attendent avec la plus grande impatience. Dès l'origine du

systême métrique républicain, le comité de Salut Pulic avoit prévenu leurs desirs, en changeant la section géométrique du *cadastre*, de calculer les sinus naturels pour chaque dix-millième du quart de cercle, avec 22 caractères décimaux, et les logarithmes des *sinus* et *tangentes*, pour chaque cent-millième, avec 12 décimales exactes. D'après un arrêté subséquent, il fut enjoint à la même section, de calculer encore les logarithmes des 200000 premiers nombres, avec le même degré de précision que les *logarithmes-sinus*. Ce travail immense, qui étonne encore ceux qui s'en sont occupés, fut exécuté en moins de deux ans, par un très-petit nombre de calculateurs, sous la direction du citoyen Prony. On ne sauroit trop regretter que la pénurie du trésor public, ait fait suspendre l'impression d'un ouvrage qui doit immortaliser la nation francaise, et qui sera un monument aussi précieux pour les géomètres, qu'il sera nécessaire à la géographie, à l'astronomie, à la navigation, etc.

VIII.

DES MONNOIES.

Le franc (d'argent) vaut 10 décimes ou 100 centimes; son poids est de 5 grammes. Celui de la livre (tournois) est de $4.^{\text{gram}}9383$.

Ainsi le rapport de la livre (tournois) au franc, sera $\frac{4,9383}{5} = 0,9877$.

Donc

1 livre . .	*vaut*	$0^{fr.}$	,988.
1 sou . .		0	,0494.
1 denier .		0	,004.

Au contraire, si nous divisons 5 par 4,9383, nous aurons pour quotient 1,012, qui représente le rapport du franc à la livre.

Donc

1 franc . .	*vaut*	$1^{\#},012$	=	$1^{\#}$	0^{s}	$2^{d},9$
1 décime .		0 ,1012	=	0	2	
1 centime .		0 ,0101	=	0	0	2, 4

OBSERVATION.

Les Principes et les Résultats précédens, suffisent sans doute pour faire toutes les applications qu'on peut se proposer sur les nouvelles mesures; mais pour les exécuter avec plus de facilité, pour vérifier même plus promptement les rapports fondamentaux que nous avons établis, les Élèves feront bien de connoître les moyens abrégés de

multiplier et de diviser les chiffres décimaux ; ce sera d'ailleurs une nouvelle preuve pour eux de l'extrême simplicité des nouveaux calculs. Il est donc important qu'ils étudient avec soin, et se rendent bien familière la méthode qui se trouve dans *BÉZOUT* en petit caractère, à la fin de la multiplication et de la division. Ces méthodes d'abréviation, on ne sait pourquoi, sont toujours négligées par les commençans. Néanmoins, soit un nombre composé de six chiffres décimaux ; supposons qu'on en demande le quarré, avec la même précision que la racine elle-même ; il est évident, que si on exécute la multiplication en entier, le produit renfermant 12 décimales, sera poussé à un degré d'exactitude tout-à-fait inutile. Il est donc nécessaire en pareil cas de savoir combiner ses deux facteurs, de façon à n'avoir strictement au produit, que les 6 premiers chiffres décimaux auxquels on veut s'arrêter. Quant à la division, n'est-il pas certain qu'on peut se dispenser d'écrire chaque fois un zéro à la suite du reste, pour obtenir plusieurs chiffres au quotient? Au reste, il ne faut pas croire que l'utilité de ces

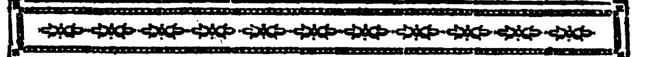
artifices de calcul, et de beaucoup d'autres semblables, se borne au nouveau systême des poids et mesures; ils sont encore nécessaires dans les autres parties des Mathématiques, soit pour ménager le temps dont l'homme studieux est toujours avare, soit pour éviter l'ennui et le dégoût qu'on ne manque pas d'éprouver dans certaines applications numériques, quand on ne sait point s'écarter des routes ordinaires, pour en prendre de plus abrégées.

FIN.

AVIS DES LIBRAIRES.

NOTRE Édition du *Bézout-Artillerie* (*) ayant été accueillie de la manière la plus favorable, c'eſt un devoir pour nous de donner, ſous la même forme, les autres Ouvrages de l'Auteur. En voyant le *Bézout-Marine* que nous publions aujourd'hui, on s'appercevra que nos efforts ont été en croiſſant. La reconnoiſſance & nos intérêts nous en faiſoient une loi. Le même papier, un caractère typographique plus neuf, les mêmes ſoins pour l'exactitude des calculs, l'attention la plus ſévère à la correction des Épreuves : tels ſont les moyens que nous avons employés. Si le ſuccès eſt dû au zèle & au deſir d'être utiles, nous oſons nous flatter d'y avoir quelques droits.

(*) Qu'on nous pardonne ici cette expreſſion uſitée dans le Commerce de la Librairie.



PRÉFACE.

LE Cours de Mathématiques dont nous donnons aujourd'hui la première Partie, doit rassembler les connoissances élémentaires que M. le Duc de Choiseul a jugé nécessaire d'exiger des Gardes du Pavillon & de la Marine, avant de les admettre au rang d'Officiers de Vaisseau.

Quelque utile qu'il soit d'instruire de bonne heure ces jeunes Gentilshommes, dans la pratique d'un art aussi étendu que celui de la Navigation, on ne peut douter que la connoissance préliminaire des principes sur lesquels portent les règles de l'art, ne doive contribuer beaucoup à faire fructifier les leçons qu'ils recevront ensuite de l'expérience, ne les dispose à y être plus attentifs, & par conséquent n'accélère beaucoup leurs progrès.

D'ailleurs, il est si rare qu'un esprit accoutumé à obéir servilement aux seules règles de la pratique, se replie ensuite assez sur

lui-même, pour revenir avec ſuccès à l'étude de la théorie, qu'on ne peut trop tôt les diſpoſer à profiter des avantages qu'ils peuvent retirer de celle-ci.

Preſque toutes les méthodes de la Navigation-pratique ſont fondées ſur des connoiſſances mathématiques : comment pourroit-on différer d'inſtruire des principes de ces ſciences, ceux qui ſont deſtinés à en diriger un jour l'application ?

Pour me conformer, autant qu'il eſt en moi, aux vues du Miniſtre qui a bien voulu me confier l'examen des études des Gardes du Pavillon & de la Marine, ainſi que la compoſition d'un Cours de Mathématiques à leur uſage, j'ai cru devoir m'attacher à concilier ces deux points, la néceſſité d'inſtruire ces Élèves ſur les connoiſſances mathématiques relatives à leur objet, & celle de les en inſtruire dans un intervalle de temps qui ne leur fît rien perdre de l'avantage qu'il doit y avoir à aller de bonne heure à la Mer.

Pour ſatisfaire à ces deux objets, je me ſuis propoſé, 1°. de borner le Cours d'Études

d'obligation, aux propositions directement utiles à la Navigation, & à celles qui seroient indispensables pour l'intelligence de celles-là. 2°. De faciliter cette étude, en la rendant plus intéressante par de fréquentes applications à la pratique, prises principalement dans la Marine; ce qui réunit encore l'avantage de disposer l'esprit des Commençans à saisir de bonne heure le lien qui unit la théorie & la pratique.

Mais dans la vue de concourir, autant qu'il m'est possible, au progrès d'un art aussi important, j'ai cru devoir ne pas perdre de vue ceux de ces jeunes Gentilshommes qui joignant à une noble émulation des dispositions plus marquées que les autres, auroient le desir de s'instruire plus parfaitement. C'est dans cette vue que j'aurai soin de répandre dans ce Cours, des connoissances plus étendues, & spécialement celles qui peuvent faciliter l'intelligence des ouvrages de feu M. Bouguer, & de quelques autres ouvrages non moins utiles à la Marine, dont on n'a pas encore retiré, à beaucoup près, tout le fruit qu'on peut en espérer, parce que les

études des Gardes n'y étoient pas dirigées aussi pleinement qu'on se propose de le faire.

Ces connoissances qu'il est louable d'acquérir, & auxquelles on ne peut trop inviter les Gardes du Pavillon & de la Marine de s'appliquer; ces connoissances, dis-je, ne seront point d'obligation, & nous aurons soin de les distinguer de celles-ci, par un caractère dont nous avertirons.

Le Cours de Mathématiques dont il s'agit ici, sera divisé en quatre parties.

La première traite de l'Arithmétique.

La seconde traitera de la Géométrie, dans laquelle on comprendra la Trigonométrie rectiligne & la Trigonométrie sphérique.

La troisième aura pour objet, l'Algèbre & l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

La quatrième comprendra la Statique & le mouvement, avec quelques propositions d'Hydrostatique & d'Hydraulique.

Nous avons préféré de faire succéder l'Algèbre à la Géométrie plutôt qu'à l'Arithmétique ; parce qu'outre que l'Algèbre nous eût été d'une utilité très-médiocre dans la Géométrie élémentaire, les Commençans

ne ſont d'ailleurs pas encore aſſez exercés dans les raiſonnemens mathématiques, pour ſentir la force des démonſtrations algébriques, quoique celles-ci ſoient ſouvent plus ſimples que les démonſtrations ſinthétiques; au lieu que dans la diſpoſition que nous avons choiſie, on a lieu de croire que les Commençans déjà fortifiés par l'étude des deux premières Parties, en auront d'autant plus de facilité à généraliſer leurs idées, & ſaiſiront mieux les uſages nombreux qu'on peut faire de cette ſcience; d'ailleurs ayant déjà plus de connoiſſances acquiſes, ils feront plus à portée de ſe familiariſer avec cette ſcience, par un plus grand nombre d'objets auxquels ils pourront l'appliquer.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail ſur l'exécution des trois dernières parties du Cours; nous nous bornons à rendre compte de celle-ci. Elle renferme ſous un Volume aſſez peu conſidérable, ce qu'il eſt néceſſaire de ſavoir, non-ſeulement pour appliquer les connoiſſances mathématiques que nous enſeignerons par la ſuite, mais encore pour ſatisfaire à divers autres uſages. En expoſant

les méthodes, nous avons évité de les multiplier pour un même objet, parce qu'on ne peut veiller trop soigneusement à ne pas partager l'attention dans les commencemens; c'est un abus que de dire, en faveur de l'opinion contraire, qu'il est utile d'envisager un objet sous différens aspects : cela n'est vrai que lorsqu'on a acquis un certain nombre de connoissances. C'est par ce même principe, que nous avons cru devoir resserrer les raisonnemens & les discours, dans beaucoup d'endroits : les Commençans, peu ou point du tout faits à raisonner méthodiquement, perdent, en parcourant un long échafaudage de Logique, la force de tête qui leur est nécessaire pour saisir l'esprit d'une démonstration.

On a donc fait ensorte de ne donner aux raisonnemens, que l'étendue nécessaire pour être bien entendus, & d'en élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiomes, & qui à force de supposer le Lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel.

J'ai tâché d'applanir la route, soit en

ſimplifiant des raiſonnemens déjà employés, ſoit en leur en ſubſtituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, ſoit enfin en employant un langage familier & ſimple. C'eſt au Public à juger ſi j'ai réuſſi; mais on ne doit pas s'attendre que le Lecteur ſoit diſpenſé d'un certain degré d'attention : on ne fera jamais un livre de Mathématiques qui puiſſe être lu comme on lit un livre d'Hiſtoire.

Je ne ſuppoſe d'autre connoiſſance à mon Lecteur, que celle des noms des nombres & quelques autres idées auſſi familières ſur leſquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales. Je paſſe de-là aux quatre opérations fondamentales, dont je donne le procédé, & dont j'explique la nature & les principes de manière à en faciliter l'application aux opérations plus compoſées qui en dépendent. A la ſuite de ces opérations, j'en indique quelques uſages. Les Fractions ſont traitées à peu près de la même manière.

Les Nombres Complexes dont le calcul ſuppoſe, à la rigueur, la connoiſſance des

Fractions, ſuccèdent à celles-ci. Quoique je n'aie pas parlé du Toiſé, les règles que j'ai établies, ne le renferment pas moins; mais la connoiſſance de la nature des unités des facteurs & du produit, appartenant à la Géométrie, j'ai différé, pour cette raiſon, d'en parler juſqu'à ce temps.

Quoique je ne déſapprouve pas qu'on emprunte d'une ſcience, les notions qui peuvent faciliter celle dont on traite (quelque ſubordination qu'on ait d'ailleurs coutume de mettre entre ces deux ſciences), néanmoins je penſe qu'on ne doit prendre ce parti, que lorſqu'il ne s'en offre pas de plus ſimple. Comme l'Arithmétique m'a paru fournir des reſſources ſuffiſantes pour l'explication des opérations de la racine quarrée & de la racine cubique, je n'ai pas été puiſer ailleurs que dans les principes mêmes de cette ſcience.

Ce que j'expoſe des Rapports, Proportions & Progreſſions, quoique court, me paroît renfermer ce qui nous ſera néceſſaire pour les trois Parties qui doivent ſuivre. Cependant comme nous pouvons, ſans nous écarter

de la loi que nous nous sommes imposée, revenir sur quelques propriétés des progressions, que quelques Lecteurs pourroient desirer; nous avertissons que nous les avons réservées pour application de l'Algèbre.

Les Logarithmes sont d'un trop grand usage dans la pratique de la Navigation, pour que nous n'ayions pas dû nous en occuper spécialement. Aussi après avoir exposé la nature, la formation & ceux des usages de ces nombres, que nous pouvions exposer sans anticiper sur aucune autre science, nous avons donné les moyens d'étendre, dans le besoin, les secours qu'on peut tirer des Tables ordinaires.

Quoiqu'on puisse faire un grand nombre d'applications de l'Arithmétique à la Navigation, ce n'est cependant pas dans l'Arithmétique même qu'elles peuvent trouver leur place, parce qu'elles supposent presque toutes, au moins la Géométrie. Néanmoins dans le nombre des applications que nous avons données, nous avons pris quelques exemples dans le métier même. A mesure que nous avancerons, elles deviendront & plus nombreuses & plus importantes.

AVERTISSEMENT.

Les nombres que l'on trouve entre deux parenthèſes, dans pluſieurs endroits de ce Livre, ſont deſtinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonſtration de la propoſition ſur laquelle on s'appuie dans ces endroits. A l'égard des numéros, ils ſont au commencement des alinéa.

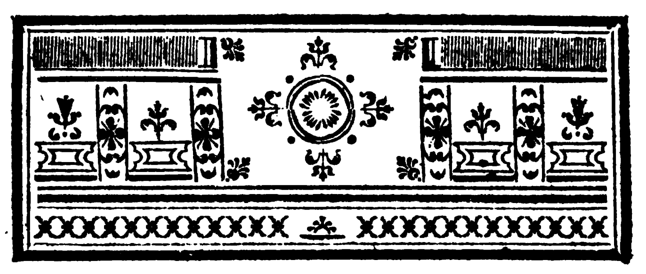
Ce que l'on trouvera en petits caractères, renferme les objets qui ne ſont pas d'obligation dans le Cours d'Études des Gardes du Pavillon & de la Marine.



TABLE
DES MATIÈRES.



ÉLÉMENS



ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

NOTIONS préliminaires sur la nature & les différentes espèces de Nombres.

1. ON appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, &c. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique est donc la science des nombres: elle en considère la nature & les propriétés; & son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer & décomposer, ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*,

4. L'unité eſt une quantité que l'on prend (le plus ſouvent arbitrairement) pour ſervir de terme de comparaiſon à toutes les quantités d'une même eſpèce : ainſi, lorſqu'on dit un tel corps pèſe *cinq* livres, la livre eſt l'unité, c'eſt la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps; on auroit pu également prendre l'once pour unité, & alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unité, une quantité eſt compoſée.

Si la quantité eſt compoſée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier :* & ſi elle eſt compoſée d'unités entières, & de parties de l'unité, ou ſimplement de parties de l'unité, alors le nombre eſt dit *fractionnaire* ou *fraction : trois & demi* font un nombre fractionnaire : *trois quarts* font une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce ſans déſigner l'eſpèce des unités, comme quand on dit ſimplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abſtrait;* & lorſqu'on énonce en même temps l'eſpèce des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret.*

Nous définirons les autres eſpèces de nombres, à meſure qu'il en ſera queſtion.

De la Numération & des Décimales.

7. La numération eſt l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms & de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous diſpenſerons de donner ici les noms des nombres; c'eſt une connoiſſance familière à tout le monde.

Quant à la manière de repréſenter les nombres par des chiffres, pluſieurs raiſons nous engagent à en expoſer les principes.

8. Les caractères dont on fait uſage dans la numération actuelle, & les noms des nombres qu'ils repréſentent, ſont tels qu'on les voit ici.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro	un	deux	trois	quatre	cinq	ſix	ſept	huit	neuf.

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on eſt convenu que de dix unités, on en feroit une ſeule, à laquelle on donneroit le nom de *dixaine*, & que l'on compteroit par dixaines, comme on compte par unités, c'eſt-à-dire, que l'on compteroit deux dixaines, trois dixaines, &c. juſqu'à 9 : que pour repréſenter ces nouvelles unités, on employeroit les mêmes chiffres que pour les unités ſimples, mais qu'on les diſtingueroit par la place qu'on

leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités ſimples.

Ainſi, pour repréſenter *cinquante-quatre*, qui forment cinq dixaines & quatre unités, on eſt convenu d'écrire 54. Pour repréſenter *ſoixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines & point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités ſimples, & détermine le chiffre 6, à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter juſqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* incluſivement.

9. Remarquons, en paſſant, cette propriété de la numération actuelle; ſavoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou ſuivi d'un zéro, repréſente un nombre dix fois plus grand que s'il étoit ſeul.

10. Depuis 99, on peut compter juſqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention ſemblable. De dix dixaines, on compoſera une ſeule unité qu'on nommera *Centaine*, parce que dix fois dix font cent; on comptera ces centaines depuis un juſqu'à neuf, & on les repréſentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainſi pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines & neuf unités, on écrira 859. Si l'on avoit *huit cent neuf*,

qui contiennent huit centaines, point de dixaines & neuf unités, on écriroit 809; c'est-à-dire, que l'on mettroit un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquoient aussi, on mettroit deux zéros; ainsi, pour marquer *huit cents*, on écriroit 800.

11. Remarquons encore, qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines, une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille, comptant ces unités comme ci-devant, & les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009; & pour *sept mille*, on écrira 7000; où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, & de placer

ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés vers la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, & avec dix caractères ſeulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la penſée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche: on donnera à chaque tranche les noms ſuivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *ſextillions*, &c. Le premier chiffre de chaque tranche (en partant toujours de la droite), aura le nom de la tranche, le ſecond celui de dixaines, & le troiſième celui de centaines.

Ainſi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche, comme ſi elle étoit ſeule, & l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche: par exemple, pour énoncer le nombre ſuivant.

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.
23,	456,	789,	234,	565,	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cent cinquante-ſix *trillions*, ſept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent ſoixante & cinq *mille*, quatre cent cinquante-ſix *unités*.

15. De la numération que nous venons d'expofer, & qui eft purement de convention, il réfulte qu'à mefure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre eft compofé, font de dix en dix fois plus grandes, & que par conféquent pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il fuffit de mettre à la fuite du chiffre de fes unités, un, deux, trois, &c. zéros : au contraire, à mefure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités font de dix en dix fois plus petites.

16. Telle eft la numération actuelle : elle eft la bafe de toutes les autres manières de compter, quoique dans plufieurs arts on ne s'affujettiffe pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, &c.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choifie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en eft indifférent en lui-même, pourvu qu'on puiffe mefurer les quantités qu'on a deffein de mefurer; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue dans ces fortes de divifions, c'eft de rendre les calculs le plus commodes qu'il fera poffible ; c'eft pour cette raifon, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites,

on ne la partage d'abord qu'en un certain nombre de parties, & qu'on ſubdiviſe celles-ci en d'autres, & ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'eſt ainſi que dans les monnoies on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *ſols*, le ſol en 12 parties qu'on appelle *deniers*. De même dans les meſures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le *marc* en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, &c. en ſorte que dans le premier cas on compte par vingtaines & par douzaines; dans le ſecond, par deuxaines & par huitaines, &c.

18. Un nombre qui eſt compoſé de parties rapportées, ainſi, à différentes unités, eſt ce qu'on appelle un nombre *complexe ;* & par oppoſition, celui qui ne renferme qu'une ſeule eſpèce d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. 8^{tt} ou 8 livres ſont un nombre incomplexe. 8^{tt} $17^{\text{ſ}}$ 8^{d} ou 8 livres 17 ſols 8 deniers, ſont un nombre complexe.

19. Chaque art ſubdiviſe à ſa manière l'unité principale qu'il s'eſt choiſie. Les ſubdiviſions de la toiſe ſont différentes de celles de la livre; celles de la livre, différentes de celles du jour, de l'heure; celles-ci différentes de celles du marc, & ainſi de ſuite : nous les ferons connoître, lorſque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions & subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans tous les calculs. Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques; la formation & le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer en décimales les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle soit, livre, toise, &c. est composée de 10 parties, comme on imagine la dixaine composée de dix unités simples, ou comme on imagine la livre composée de 20 sols. Ces nouvelles unités, par opposition aux dixaines, sont nommées *dixièmes*; on les représente par les mêmes chiffres que les unités simples, & comme elles sont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités simples.

Mais pour prévenir l'équivoque, & ne point donner lieu de prendre ces dixièmes pour des unités simples, on est convenu en même temps, de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particulière; celle qui est le plus en usage,

eſt une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui repréſente les unités, ou, ce qui eſt la même choſe, entre les unités & les *dixièmes*. Ainſi pour marquer *vingt-quatre unités & trois dixièmes*, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les *dixièmes*, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petites que les *dixièmes*, & par la même raiſon d'analogie, les placer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités dix fois plus petites que les *dixièmes*, ſeront cent fois plus petites que les unités principales, & pour cette raiſon ſeront nommées *centièmes*. Ainſi pour marquer *vingt-quatre unités, trois dixièmes & cinq centièmes*, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les *centièmes*, comme formés de dix parties; ces parties ſeront mille fois plus petites que l'unité principale, & pour cette raiſon ſeront nommées *millièmes*; & comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci.

En continuant de ſubdiviſer ainſi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera ſucceſſivement des *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes*, *billionièmes*, &c. & qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés ſur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité, que nous venons de décrire, sont ce que l'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la manière de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même manière; mais on ajoute à la fin, le nom des unités décimales de la dernière espèce. Ainsi pour énoncer ce nombre 34,572, on diroit trente-quatre unités & cinq cent soixante-douze *millièmes*; si c'étoient des toises, par exemple, on diroit trente-quatre toises & cinq cent soixante-douze *millièmes* de toise.

La raison en est facile à appercevoir, si l'on fait attention que dans le nombre 34,572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu, ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cent *millièmes*, puisque le *dixième* (22) valant 10 *centièmes*, & le *centième* (23) valant 10 *millièmes*, le *dixième* contiendra dix fois dix *millièmes*, ou 100 *millièmes*; ainsi, les cinq dixièmes valent 500 *millièmes*. Par une raison semblable, le chiffre 7 pourra s'énoncer en disant soixante-dix *millièmes*, puisque (23) chaque *centième* vaut 10 *millièmes*.

26. A l'égard de l'espèce des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement en comptant successivement de gauche à droite sur chaque

chiffre depuis la virgule, les noms ſuivans . . . . . . *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, *dix-millièmes*, &c.

27. Si l'on n'avoit point d'unités entières, mais ſeulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités; ainſi pour marquer 125 *millièmes*, on écriroit 0,125. Si l'on vouloit marquer 25 *millièmes*, on écriroit 0,025, en mettant un zéro entre la virgule & les autres chiffres, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties ſuivantes leur véritable valeur. Par la même raiſon, pour marquer 6 *dix-millièmes*, on écriroit 0,0006.

28. Examinons, maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puiſque la virgule détermine la place des unités, & que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs diſtances à cette même virgule; ſi l'on avance la virgule d'une, deux, trois, &c. places ſur la gauche, on rend le nombre, 10, 100, 1000, &c. fois plus petit; & au contraire on le rend 10, 100, 1000, &c. fois plus grand, ſi l'on recule la virgule d'une, deux, trois, &c. places ſur la droite.

En effet, ſi l'on a 4327,5264, & qu'en avançant la virgule d'une place ſur la gauche, on écrive 432,75264; il eſt viſible que les mille du premier

nombre, ſont des centaines dans le nouveau; les centaines, ſont des dixaines; les dixaines, des unités; les unités, des dixièmes; les dixièmes, des centièmes; & ainſi de ſuite. Donc chaque partie du premier nombre eſt devenu 10 fois plus petite par ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place ſur la droite, on eût écrit 43275,264, les mille du premier nombre ſe trouveroient changés en dixaines de mille, les centaines en mille, les dixaines en centaines, les unités en dixaines, les dixièmes en unités, & ainſi de ſuite. Donc le nouveau nombre eſt dix fois plus grand que le premier.

29. Un raiſonnement ſemblable fait voir qu'en avançant la virgule ſur la gauche, de deux ou de trois places, on rendroit le nombre, 100 ou 1000 fois plus petit, & au contraire, 100 ou 1000 fois plus grand, en reculant la virgule de deux ou de trois places ſur la droite.

30. La dernière obſervation que nous ferons ſur les décimales, eſt qu'on n'en change point la valeur en mettant à la ſuite du dernier chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainſi 43,25 eſt la même choſe que 43,250, ou que 43,2500, ou que 43,25000, &c.

Car chaque *centième* valant 10 *millièmes* ou 100 *dix-millièmes*, &c. les 25 *centièmes* vaudront 250 *millièmes*

ou 2500 *dix-millièmes*, &c.; en un mot, c'eſt la même choſe que lorſqu'au lieu de dire 25 piſtoles, on dit 250 livres; ou que lorſqu'au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 livres.

Des opérations de l'Arithmétique.

31. Ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer, ſont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les nombres, ſe réduiſent à pratiquer quelques-unes de ces opérations. Il eſt donc important de ſe les rendre familières, & d'en bien ſaiſir l'eſprit.

32. Le but de l'Arithmétique eſt, comme nous l'avons déjà dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens conſiſtent à réduire le calcul des nombres les plus compoſés, à celui des nombres plus ſimples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres poſſible. C'eſt ce qu'il s'agit d'expoſer actuellement.

De l'Addition des Nombres entiers & des Parties décimales.

33. Exprimer la valeur totale de pluſieurs nombres, par un ſeul, eſt ce qu'on appelle *faire une addition.*

Quand les nombres qu'on ſe propoſe d'ajouter n'ont qu'un ſeul chiffre, on n'a pas beſoin de règle; mais

lorsqu'ils ont plusieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *somme*, en observant la règle suivante.

Écrivez, les uns sous les autres, tous les nombres proposés ; de manière que les chiffres des unités de chacun, soient dans une même colonne verticale ; qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, &c., soulignez le tout.

Ajoutez, d'abord, tous les nombres qui sont dans la colonne des unités ; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous ; si elle surpasse neuf, elle renfermera des dixaines ; n'écrivez au-dessous que l'excédent du nombre des dixaines : comptez ces dixaines pour autant d'unités ; & ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante : observez, à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, & continuez ainsi de colonne en colonne, jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Éclaircissons cette règle par des exemples.

EXEMPLE Ier.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici.

54925	
2023	
56948	somme.

Et après avoir ſouligné le tout, je commence par les unités, en diſant 5 & 3 ſont 8, que j'écris ſous cette même colonne.

Je paſſe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 & 2 font 4, que j'écris au-deſſous.

A la colonne des centaines, je dis 9 & 0 font 9, que j'écris ſous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis 4 & 2 font 6, que j'écris ſous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dixaines de mille, je dis 5 & rien font 5, que j'écris de même au-deſſous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, eſt la ſomme des deux nombres propoſés, puiſqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les mille & les dixaines de mille, que nous avons raſſemblées ſucceſſivement.

EXEMPLE II.

On demande la ſomme des quatre nombres ſuivans..... 6903, 7854, 953, 7327: je les écris comme on les voit ici....... 6903

6903	
7854	
953	
7327	
23037	ſomme.

Et en

Et en commençant, comme ci-dessus, par la droite, je dis 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 7 font 17; j'écris les 7 unités sous la première colonne, & je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis, 1 que je retiens & o font 1, & 5 font 6, & 5 font 11, & 2 font 13; j'écris 3 sous la colonne actuelle, & je retiens, pour la dixaine, une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant, 1 & 9 font 10, & 8 font 18, & 9 font 27, & 3 font 30; je pose o sous cette colonne, & je retiens, pour les trois dixaines, trois unités que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement, 3 & 6 font 9, & 7 valent 16, & 7 font 23; j'écris 3 sous cette colonne, & comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance, d'une place, les deux dixaines qui appartiendroient à la colonne suivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037 est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales; comme elles se comptent, ainsi que les autres nombres, par dixaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre dans une même colonne.

Ainſi, ſi on propoſe d'ajouter les trois nombres 72,957... 12,8... 124,03, j'écrirai.. 72,957

12,8

124,03

209,787 ſomme.

Et en ſuivant la règle ci-deſſus, j'aurai 209,787 pour la ſomme.

De la Souſtraction des Nombres entiers & des Parties décimales.

35. La Souſtraction eſt l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le réſultat de cette opération s'appellè *reſte* ou *excès* ou *différence.*

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-deſſous de l'autre, de la même manière que dans l'addition; & ayant ſouligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de ſon correſpondant ſupérieur; c'eſt-à-dire, les unités des unités, les dixaines des dixaines, &c. on écrira chaque reſte au-deſſous, dans le même ordre, & zéro lorſqu'il ne reſtera rien.

Lorſque le chiffre inférieur ſe trouvera plus grand que le chiffre ſupérieur correſpondant, on ajoutera

à celui-ci dix unités qu'on aura en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

EXEMPLE Ier.

On propose de retrancher 5432 de 8954. J'écris ces deux nombres comme il suit.

8954
5432
3522 reste.

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reste 2 que j'écris au-dessous: puis, passant aux dixaines, je dis 3 ôté de 5, il reste 2 que j'écris sous les dixaines. A la troisième colonne, je dis 4 ôté de 9, il reste 5 que j'écris sous cette colonne. Enfin à la quatrième, je dis 5 ôté de 8, il reste 3 que j'écris sous 5, & j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987 de 27646.

On écrira.... 27646
7987
19659 reste.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité ſur ſon voiſin 4, & on dira 7 ôté de 16, il reſte 9 qu'on écrira ſous 7.

Paſſant aux dixaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 ſeulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité ſur le chiffre 6 de la gauche; & on dira 8 ôté de 13, il reſte 5 qu'on écrira ſous 8. Paſſant à la troiſième colonne, on dira de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-deſſus); il reſte 6 qu'on écrira ſous 9.

A la quatrième colonne, on dira, par la même raiſon, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reſte 9 qu'on écrira ſous 7; & comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira ſous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité ſur ce 2, mais ſeulement 1, & on aura 19659 pour le reſte.

36. Si le chiffre ſur lequel on doit faire l'emprunt, étoit un zéro, l'emprunt ſe feroit, non pas ſur ce zéro, mais ſur le premier chiffre ſignificatif qui viendroit après; or quoique ce ſoit, alors, emprunter 100 ou 1000 ou 10000, ſelon qu'il y a un, deux

ou trois zéros consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus; c'est-à-dire, qu'on ajoutera seulement 10 au chiffre pour lequel on emprunte; & comme ces dix sont censés pris sur les 100 ou 1000, &c. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, &c. qui restent, on comptera les zéros suivans pour autant de neuf; c'est ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de..............	20064
on veut retrancher......	17489
	2575 reste.

On dira d'abord, 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant) il reste 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, & qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2, une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille on ne prendra que dix unités qu'on ajoutera à 5, & on dira 8 ôté de 15 il reste 7.

Comme on n'a employé que 10 unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes,

pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros; ce qui revient au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9 : ainsi l'on dira 4 ôté de 9, reste 5; puis 7 ôté de 9, reste 2; & enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même règle; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres proposés, en mettant un nombre suffisant de zéros à la suite de celui qui a le moins de décimales; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (30).

EXEMPLE IV.

De.......... 5403,25
on veut ôter.... 385,6532

Je mets deux zéros à la suite des décimales du nombre supérieur; après quoi, j'opère sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la règle donnée pour les nombres entiers,

5403,2500
385,6532

& je trouve pour reste..... 5017,5968.

De la preuve de l'Addition & de la Souſtraction.

38. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique, eſt une autre opération que l'on fait pour s'aſſurer de l'exactitude du réſultat de la première.

La preuve de l'addition ſe fait en ajoutant de nouveau, par parties, mais en commençant par la gauche, les ſommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la ſomme inférieure: on écrit au-deſſous, le reſte, qu'on réduit par la penſée en dixaines, pour le joindre au chiffre ſuivant de cette même ſomme, & du total on retranche encore la totalité de la colonne ſupérieure; on continue ainſi, juſqu'à la dernière colonne, dont la totalité étant retranchée, ne doit laiſſer aucun reſte.

Ainſi, ayant trouvé ci-deſſus que les quatre nombres

	6903
	7854
	953
	7327
ont pour ſomme.............	23037
	3220

Pour vérifier ce résultat, j'ajoute les mêmes nombres, en commençant par la gauche; & je dis 6 & 7 font 13, & 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dixaines, qui avec le chiffre suivant zéro, font 30. Je passe à la seconde colonne, & je dis 9 & 8 font 17, & 9 font 26, & 3 font 29 que j'ôte de 30; il reste 1 ou une dixaine, qui, jointe au chiffre suivant 3, fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troisième colonne, en disant 5 & 5 font 10, & 2 font 12, qui ôtés de 13, il reste 1 ou une dixaine, laquelle ajoutée au chiffre suivant 7, fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en disant 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 7 font 17, qui ôtés de 17, il ne reste rien: d'où je conclus que la première opération est exacte.

On est fondé à conclure que la première opération a été bien faite, lorsqu'après cette preuve il ne reste rien, parce qu'ayant ôté successivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dixaines & toutes les unités dont on avoit composé la somme, il faut qu'à la fin il ne reste rien.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché; si la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché: ainsi je vois que dans le troisième exemple que nous avons donné ci-dessus, l'opération a été bien faite,

parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché), avec le reste 2565, je reproduis 20054, nombre dont on a retranché.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle le *multiplicande ;* celui par lequel on doit multiplier, s'appelle le *multiplicateur ;* & le résultat de l'opération s'appelle *produit.*

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue ; mais nous avertissons expressément que nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande & le multiplicateur se nomment aussi les *facteurs* du produit ; ainsi 3 & 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant

de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, & faisant ensuite l'addition ; par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourroit écrire

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Et la somme 21 résultante de cette addition seroit le produit.

Mais lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable, l'opération devient fort longue : ce que nous appelons proprement multiplication, est la méthode de parvenir à ce même résultat, par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite, c'est-à-dire, sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu, lequel des deux nombres proposés pour la multiplication, on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur ; par exemple, si on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4, le produit sera toujours 12 : en effet, 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4, & 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1 ; or il est évident que 1 fois 4 & 4 fois 1 sont la même chose ; & on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque, par l'énoncé de la question, le

multiplicateur & le multiplicande ſont des nombres concrets, il importe de diſtinguer le multiplicande du multiplicateur : cette attention eſt principalement néceſſaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la ſuite.

Au reſte, cela eſt toujours aiſé à diſtinguer : la queſtion qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle eſt la quantité qu'il s'agit de répéter pluſieurs fois, c'eſt-à-dire, le multiplicande, & quelle eſt celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande; c'eſt-à-dire, quel eſt le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur eſt deſtiné à marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il eſt toujours un nombre abſtrait : ainſi quand on demande ce que doivent coûter 52 toiſes de bois, à raiſon de 36 livres la toiſe; on voit que le multiplicande eſt 36 livres, qu'il s'agit de répéter 52 fois, ſoit que ce 52 marque des toiſes, ou toute autre choſe.

47. Le produit qui eſt formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande (*).

Après cette petite digreſſion ſur la nature des unités

(*) Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique, dont nous ne parlerons qu'en Géométrie, comme cela nous paroit aſſez naturel. Les unités du multiplicateur n'y ſont jamais que des unités abſtraites, comme dans toute autre multiplication.

du produit & de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les plus composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre, par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre, en ajoutant successivement un même nombre à lui-même. On peut aussi, si on le veut, faire usage de la Table suivante, qu'on attribue à Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande de cette Table se forme en ajoutant 1 à lui-même successivement.

La seconde, en ajoutant 2 de même.

La troisième, en ajoutant 3, & ainsi de suite.

49. Pour trouver, par le moyen de cette Table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun; on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure; & en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre sur lequel on se sera arrêté, sera le produit; ainsi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9; je descends depuis 9, pris dans la première bande, jusques vis-à-vis de 6 pris dans la première colonne; le nombre sur lequel je m'arrête est 54; par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.

50. Écrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un seul chiffre, sous le multiplicande; peu importe

ſous quel chiffre; mais pour fixer les idées, ſuppoſons que ce ſoit ſous le chiffre des unités.

Multipliez d'abord le nombre des unités par votre multiplicateur, & ſi le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-deſſous; s'il contient des unités & des dixaines, écrivez ſeulement les unités, & comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multiplicande, & au produit ajoutez les unités que vous avez retenues; écrivez le tout au-deſſous, s'il peut être marqué par un ſeul chiffre, ſinon n'écrivez que les unités de ce produit, & retenez-en les dixaines qui ſont des centaines, pour les ajouter au produit ſuivant, qui ſera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier ſucceſſivement, ſuivant la même règle, tous les chiffres du multiplicande; la ſuite des chiffres que vous aurez écrits, marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toiſes valent de pieds. La toiſe eſt de ſix pieds. La queſtion ſe réduit à prendre 6 pieds 2864 fois; ou, ce qui revient au même (44), à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc...... 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.
17184 produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4 font 24; j'écris 4, & je retiens 2 unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36, & 2 que j'ai retenues font 38, je pose 8 & je retiens 3.

3°. 6 fois 8 font 48, & 3 que j'ai retenues font 51; je pose 1 & je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12, & 5 que j'ai retenues font 17, que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toises, puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, & 6 fois les 2 mille, & par conséquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement, avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite : ainsi, on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande, par le chiffre des unités du multiplicateur, puis par celui des dixaines, & on écrira ce second produit sous le premier; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par

des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit, ſous les dixaines; & les autres chiffres, toujours en avançant ſur la gauche.

Le troiſième produit, qui ſe fera en multipliant par les centaines, ſe placera de même ſous le ſecond, mais en avançant encore d'une place: on ſuivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, & la ſomme ſera le produit total.

EXEMPLE.

On propoſe de multiplier.... 65487
par................. 6958

```
     523896
    327435
   589383
  392922
  455658546 produit.
```

Je multiplie d'abord 65487 par le nombre 8 des unités du multiplicateur, & j'écris ſucceſſivement ſous la barre., les chiffres du produit 523896 que je trouve en ſuivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie, de même, le nombre 65487, par le ſecond chiffre 5 du multiplicateur, & j'écris le produit 327435,

327435, ſous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 ſous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troiſième chiffre 9, j'écris le produit 589383, ſous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3, au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie eſt un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur; & j'écris le produit 392922, ſous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que ſon dernier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille: enfin j'ajoute tous ces produits, & j'ai 455658546 pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'eſt-à-dire, pour la valeur de 65487, pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la ſeconde, 900 fois par la troiſième, & 6000 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux, étoient terminés par des zéros, on abrégeroit l'opération, en multipliant comme ſi ces zéros n'y étoient point; mais on les mettroit enſuite, tous, à la ſuite du produit.

EXEMPLE.

On propose de multiplier..... 6500
par........... 350

325
195

2275000

Je multiplie seulement 65 par 35, & je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande & du multiplicateur.

En effet, le multiplicande 6500, représente 65 centaines; ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement, le multiplicateur 350, marque 35 dixaines; ainsi quand on multiplie par 35, on doit sous-entendre que le produit sera des dixaines; il sera donc des dixaines de centaines, c'est-à-dire, des mille; il doit donc avoir 3 zéros: on appliquera un raisonnement semblable à tous les autres cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on se dispensera d'écrire ceux-ci dans le produit; & passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéros, on en avancera

le produit ſur la gauche d'autant de places plus une, qu'il y a de zéros qui ſe ſuivent dans le multiplicateur; c'eſt-à-dire, de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a..................	42052
à multiplier par......	3006
	252312
	126156
	126408312

Après avoir multiplié par 6, & écrit le produit 252312, on multipliera tout de ſuite par 3; mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille; il faudra donc le reculer de trois places, c'eſt-à-dire, d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interpoſés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties Décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on obſervera la même règle que pour les nombres entiers, ſans faire aucune attention à la virgule; mais après avoir trouvé le produit, on en ſéparera ſur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE Ier.

On propose de multiplier..... 54,23
par................. 8,3

```
  54,23
   8,3
  16269
 43384
450,109
```

Je multiplierai 5423 par 83, le produit sera 450,109 ; & comme il y a deux décimales dans le multiplicande, & une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit, qui par-là deviendra 450,109, tel qu'il doit être.

La raison de cette règle est facile à saisir, en observant que si le multiplicateur étoit 83, le produit n'auroit en décimales que des *centièmes*, puisqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54,23, dont les décimales sont des centièmes ; mais comme le multiplicateur est 8,3, c'est-à-dire (21), dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des unités dix fois plus petites que les centièmes ; le dernier chiffre de ses décimales doit donc (23) être des *millièmes* ; il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit ; c'est-à-dire, autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

EXEMPLE II.

Si on avoit........... 0,12
à multiplier par... 0,3

0,036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36; comme la règle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourroit être embarrassé à y satisfaire, puisque ce produit 36 n'en a que deux; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interposer un zéro entre 36 & la virgule. En effet, si l'on avoit 0,12 à multiplier par 3, il est évident qu'on auroit 0,36; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire, des millièmes, & c'est ce qui a lieu (28) lorsqu'on écrit 0,036.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux, une approximation suffisante, mais prompte; il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier 45,625957 par 28,635, je n'aie besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millième près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous; c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant

répondre le chiffre de ses unités, sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à la droite de celui par lequel je multiplie; & à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le premier chiffre du nouveau produit, sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espèce de décimales que je me proposois d'avoir.

EXEMPLE.

Je veux multiplier.......... 45,625957
par.................... 28,635

mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millième d'unité près.

J'écris ainsi ces deux nombres..... 45,625957
53682
91251914
36500760
2737554
136875
22810
130649911
produit........................ 1306,499

Et si l'on avoit fait la multiplication à l'ordinaire, on auroit eu 1306,499278695, qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisième décimale, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avoit pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, pour faire correspondre le chiffre des unités

du multiplicateur, au chiffre auquel la règle prescrit de le faire correspondre, on y suppléroit en mettant des zéros.

EXEMPLE.

On doit multiplier........... 54,236
par.................. 532,27
& on veut avoir le produit à un centième d'unité près; j'écris..... 54,236000

```
     54,236000
        72235
    ---------
    271180000
     16270800
      1084720
       108472
        37961
    ---------
    288681953
```

produit... 28868,20, en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux que l'on supprime, passent 50.

Pour troisième exemple, supposons qu'on ait à multiplier 0,2275389 17
par 0,5664178
& l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit, on écrira.... 0,2275389 17

```
  0,227538917
     87146650
    ---------
    ........0
    113769455
     13652334
      1365228
        91012
         2275
         1589
          176
    ---------
    128882069
```

produit.. 0,1288821

Sur quelques usages de la Multiplication.

56. Nous ne nous proposons pas de faire connoître tous les usages qu'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connoît la valeur de chacune. Par exemple, 1°. Combien doivent coûter 5842 toises, à raison de 54# la toise ? Il faut multiplier 54# par 5842, ou (44) 5842# par 54, on aura 315468# pour le prix total demandé. 2°. Combien 5954 pieds cubes (*) d'eau pèsent-ils, en supposant que le pied cube pèse 72 livres ? il faut multiplier 72℔ par 5954, ou 5954℔ par 72 ; on aura 428688℔ pour le poids des 5954 pieds cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sols, & ceux-ci en deniers; les toises en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes; les jours en heures, celles-ci en minutes; ces dernières

(*) Le pied cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large & sur un pied de haut, avec laquelle on évalue la capacité des corps, ainsi qu'on le verra en Géométrie.

en ſecondes: on a ſouvent beſoin de ces ſortes de converſions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir 8# 17ſ 7d en deniers; comme la livre vaut 20ſ, on multipliera les 8# par 20 (52), ce qui donnera 160ſ, auxquels joignant les 17ſ, on aura 177ſ, qu'on multipliera par 12, parce que chaque ſol vaut 12 deniers; & on aura 2124 deniers, leſquels joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de 8# 17ſ 7d convertis en deniers.

Si l'on demande combien une année commune ou 365 jours, 5 heures, 48 minutes, ou 365j 5h 48m valent de minutes; comme le jour eſt de 24 heures, on multipliera 24h par 365, & au produit 8760h on ajoutera 5h, on multipliera le total 8765 par 60 (52), parce que l'heure contient 60 minutes, & on aura 525900 minutes, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette converſion des parties du temps eſt utile dansq uelques opérations du *Pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52), peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombre de *tonneaux*; comme le tonneau de poids pèſe 2000 livres; ſi l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854

& mettre les trois zéros à la ſuite du produit; on aura 1708000 pour le nombre de livres que pèſent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faiſons obſerver aux commençans, que ces expreſſions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, &c. ſignifient la même choſe que multiplier par 2, par 3, par 4, &c.

De la Diviſion des Nombres entiers, & des Parties Décimales.

59. Diviſer un nombre par un autre, c'eſt, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le ſecond.

Le nombre qu'on doit diviſer, s'appelle *Dividende;* celui par lequel on doit diviſer, *Diviſeur;* & celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviſeur, s'appelle le *Quotient.*

On n'a pas toujours pour but, dans la diviſion, de ſavoir combien de fois un nombre en contient un autre; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme ſi elle tendoit à ce but; c'eſt pourquoi on peut, dans tous les cas, la conſidérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviſeur.

Il ſuit de-là, que ſi on multiplie le diviſeur par

le quotient, on doit reproduire le dividende, puiſque c'eſt prendre ce diviſeur autant de fois qu'il eſt dans le dividende : cela eſt général, ſoit que le quotient ſoit un nombre entier, ſoit qu'il ſoit un nombre fractionnaire.

Quant à l'eſpèce des unités du quotient, ce n'eſt ni par l'eſpèce de celles du dividende, ni par l'eſpèce de celles du diviſeur, ni par l'une & l'autre qu'il faut en juger; car le dividende & le diviſeur reſtant les mêmes, le quotient qui ſera auſſi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ſes unités, ſelon la queſtion qui donne lieu à cette diviſion.

Par exemple, s'il eſt queſtion de ſavoir combien 8# contiennent 4#, le quotient ſera un nombre abſtrait qui marquera 2 fois. Mais s'il eſt queſtion de ſavoir combien pour 8# on fera faire d'ouvrage à raiſon de 4# la toiſe, le quotient ſera 2 toiſes, qui eſt un nombre concret, & dont l'eſpèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviſeur.

Mais on voit, en même temps, que la queſtion ſeule qui conduit à faire la diviſion dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la Diviſion d'un nombre composé de pluſieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

60. L'opération que nous allons décrire, ſuppoſe

qu'on ſache trouver combien de fois un nombre de un ou deux chiffres contient un nombre d'un ſeul chiffre. C'eſt une connoiſſance déjà acquiſe, quand on ſait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut auſſi, pour y parvenir, faire uſage de la Table que nous avons donnée ci-deſſus (48). Par exemple, ſi je veux ſavoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviſeur 9 dans la bande ſupérieure, & je deſcends verticalement juſqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'eſt ici 72; alors le nombre 8 qui ſe trouve vis-à-vis 72, dans la première colonne, eſt le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela ſuppoſé, voici comment ſe fait la diviſion d'un nombre qui a pluſieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Écrivez le diviſeur à côté du dividende; ſéparez l'un de l'autre par un trait, & ſoulignez le diviſeur ſous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à meſure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre ſur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, ſi le premier ne contient pas le diviſeur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux

premiers chiffres contiennent le diviſeur, écrivez ce nombre de fois ſous le diviſeur.

Multipliez le diviſeur par le quotient que vous venez d'écrire, & portez le produit ſous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit, de la partie ſupérieure du dividende à laquelle il répond, & vous aurez un reſte.

A côté de ce reſte, abaiſſez le chiffre ſuivant du dividende principal; & vous aurez un ſecond dividende partiel, ſur lequel vous opérerez comme ſur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviſeur par ce quotient, écrivant & retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaiſſerez de même, à côté du reſte de cette diviſion, le chiffre du dividende qui ſuit celui que vous avez abaiſſé, & vous continuerez toujours de la même manière juſqu'au dernier incluſivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres comme on les voit ci-après.

dividende 8769	7 diviſeur.
7	$1252\frac{5}{7}$ quotient.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire en 8 mille, combien de fois 7; mais je dis ſimplement en 8 combien de fois 7 ? Il y eſt une fois. Cet 1 eſt naturellement mille; mais les chiffres qui viendront après, lui donneront ſa véritable valeur; c'eſt pourquoi j'écris ſimplement 1 ſous le diviſeur.

Je multiplie le diviſeur 7 par le quotient 1, & je porte le produit 7 ſous la partie 8 que je viens de diviſer; faiſant la ſouſtraction, j'ai pour reſte 1.

Ce reſte 1 eſt la partie de 8 qui n' pas été diviſée, & eſt une dixaine à l'égard du chiffre ſuivant 7; c'eſt pourquoi j'abaiſſe ce même chiffre 7, à côté, & je continue l'opération, en diſant en 17, combien de fois 7? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviſeur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver; je porte le produit 14 ſous mon dividende partiel 17, & faiſant la ſouſtraction, il me reſte 3 pour la partie qui n'a pu être diviſée.

A côté de ce reſte 3, j'abaiſſe 6, troiſième chiffre du dividende, & je dis en 36 combien de fois 7? 5 fois; j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 7 par 5; & ayant écrit le produit 35 ſous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche, & il me reſte 1.

Enfin à côté de ce reſte 1, j'abaiſſe le chiffre 9 du dividende, & je dis en 19 combien de fois 7? 2 fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 7, par ce nouveau quotient 2, & ayant écrit le produit 14 ſous mon dernier dividende partiel 19, j'ai pour reſte 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7, autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit, c'eſt-à-dire, 1252 fois, & qu'il reſte 5.

A l'égard de ce reſte, nous nous contenterons, pour le préſent, de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'eſt-à-dire, en écrivant le diviſeur au-deſſous de ce reſte, & ſéparant l'un de l'autre par un trait; &

alors on prononce *cinq ſeptièmes*. Nous expliquerons par la ſuite la nature de ces ſortes de nombres.

61. Si dans la ſuite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels ſe trouvoit ne pas contenir le diviſeur, on écriroit zéro au quotient, & omettant la multiplication, on abaiſſeroit tout de ſuite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, & on continueroit la diviſion.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviſer 14464 par 8.

```
14464 | 8
8     |-----
      | 1808
-----
 64
 64
-----
 064
  64
-----
   0
```

Je prends ici les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviſeur.

Je trouve que 14 contient 8, 1 fois, j'écris 1 au quotient; je multiplie 8 par 1, & je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reſte

6, à

6, à côté duquel j'abaiſſe le troiſième chiffre 4 du dividende.

Je continue, en diſant, en 64 combien de fois 8? huit fois; j'écris 8 au quotient, & faiſant la multiplication, j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64, il me reſte 0, à côté duquel j'abaiſſe 6, quatrième chiffre du dividende; & comme 6 ne contient pas 8, j'écris 0 au quotient, & j'abaiſſe tout de ſuite à côté de 6 le dernier chiffre du dividende qui eſt ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8? il y eſt 8 fois: après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication, & je retranche le produit 64; & comme il ne reſte rien, j'en conclus que 14464 contiennent 8, 1808 fois.

De la Diviſion par un nombre de pluſieurs chiffres.

62. Lorſque le diviſeur aura pluſieurs chiffres, on ſe conduira de la manière ſuivante.

Prenez ſur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire pour contenir le diviſeur.

Cela poſé, au lieu de chercher, comme ci-devant, combien la partie du dividende que vous avez priſe, contient votre diviſeur entier, cherchez ſeulement combien de fois le premier chiffre de votre diviſeur

eſt compris dans le premier chiffre de votre dividende, ou dans les deux premiers, ſi le premier ne ſuffit pas; marquez ce quotient ſous le diviſeur comme ci-devant.

Multipliez ſucceſſivement, ſelon la règle donnée (50), tous les chiffres de votre diviſeur, par ce quotient, & portez à meſure les chiffres du produit ſous les chiffres correſpondans de votre dividende partiel. Faites la ſouſtraction, & à côté du reſte abaiſſez le chiffre ſuivant du dividende, pour continuer l'opération de la même manière.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, & prévenir en même temps les cas qui peuvent cauſer quelque embarras.

EXEMPLE Ier.

On propoſe de diviſer 75347 par 53.

75347	53
53	$1421 \frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur, & au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les 7 dixaines de 75 contiennent les 5 dixaines de 53, c'est-à-dire, combien 7 contient 5 : je trouve 1 fois, que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1, & je porte le produit 53 sous 75 : la soustraction faite, il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffre 3 du dividende, & je poursuis, en disant, pour plus de facilité : en 22 combien de fois 5 (au lieu de dire en 223 combien de fois 53) ; je trouve 4 fois que j'écris au quotient.

Je multiplie successivement par quatre les deux chiffres du diviseur, & je porte le produit 212, sous mon dividende partiel 223 ; la soustraction faite, j'ai pour reste 11 ; j'abaisse à côté de ce reste, le chiffre 4 du dividende, & je dis simplement, comme ci-dessus, en 11 combien de fois 5 ? 2 fois ; je l'écris au quotient, & je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106, que j'écris sous le dividende partiel 114 ; faisant la soustraction, j'ai pour reste 8, à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 7 ; je divise de même 87, & continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotient, & 34 pour reste que j'écris à côté du quotient, de la manière qui a été indiquée plus haut (60).

63. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviſeur entier; mais comme cette recherche ſeroit ſouvent longue & pénible, on ſe contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviſeur. Le quotient qu'on trouve par cette voie n'eſt pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une eſtimation approchée; mais outre que cette eſtimation met preſque toujours ſur le but, & que dans les cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu; la multiplication qui vient enſuite, ſert à redreſſer ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, ſi le dividende partiel contenoit réellement le diviſeur trois fois, par exemple, & que par l'eſſai qu'on fait on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il eſt facile de voir qu'en faiſant la multiplication par 4, on auroit un produit plus grand que le dividende, puiſqu'on prendroit le diviſeur plus de fois qu'il n'eſt réellement dans ce dividende, & par conſéquent la ſouſtraction deviendra impoſſible; alors on diminuera le quotient ſucceſſivement d'une, deux, &c. unités, juſqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puiſſe retrancher: au contraire, ſi l'on n'avoit mis que 2 au quotient, le reſte de la ſouſtraction ſe trouveroit plus grand que le diviſeur; ce qui

prouveroit que le diviſeur y eſt encore contenu, & que par conſéquent le quotient eſt trop foible.

Au reſte, on acquiert en peu de temps l'uſage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer 189492 par 375.

189492	375
1875	$505 \frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviſeur.

Je dis enſuite, en 18 ſeulement, combien de fois 3 ? il y eſt réellement 6 fois; mais en multipliant 375 par 6, j'aurois plus que mon dividende 1894; c'eſt pourquoi j'écris ſeulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5; & après avoir écrit le produit, ſous 1894, je fais la ſouſtraction, & j'ai pour reſte 19.

J'abaiſſe, à côté de 19, le chiffre 9 du dividende;

& comme 199, que j'ai alors, ne contient pas 375, je pose o au quotient, & j'abaisse à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992, pour lequel je dis, en 19 seulement, combien de fois 3 ? 6 fois. Mais par la même raison que ci-dessus, je n'écris au quotient que 5 ; & après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter, dans un grand nombre de cas, les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces essais douteux, lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas, au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans la partie correspondante du dividende, il faut chercher combien ce premier chiffre, augmenté d'une unité, se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende : cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la première.

EXEMPLE III.

On propose de diviser 1832 par 288.

Dividende	Diviseur / Quotient
	288
1832	$6\frac{104}{288}$
1728	
104	

Au lieu de dire, en 18 combien de fois 2, je dirai, en 18 combien de fois 3, parce que le diviſeur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200; je trouve 6 qui eſt le véritable quotient, au lieu que j'aurois trouvé 9, & j'aurois par conſéquent été obligé de faire trois eſſais inutiles.

Moyens d'abréger la Méthode précédente.

65. C'eſt pour rendre la méthode plus facile à ſaiſir, que nous avons preſcrit d'écrire ſous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviſeur par le quotient; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut ſe diſpenſer d'écrire ces produits, & faire la ſouſtraction à meſure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviſeur. L'exemple ſuivant ſuffira pour faire entendre comment ſe fait cette ſouſtraction.

EXEMPLE.

On veut diviſer 756984 par 932.

756984	932
1138	$812\frac{200}{932}$
2064	
200	

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui sont nécessaires pour contenir le diviseur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois; c'est pourquoi j'écris 8 au quotient; & au lieu de porter sous 7569, le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord 2 par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte sur le chiffre suivant 6 une dixaine, qui jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me reste 3 que j'écris au-dessous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté, je retiens cette unité que je vais ajouter au produit suivant; ainsi continuant la multiplication, je dis, 8 fois 3 font 24, & 1 que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende, deux dixaines, qui jointes à 6, me donnent 26, desquelles j'ôte 25, & il me reste 1 que j'écris sous 6; par-là j'ai tenu compte de la première dixaine dont j'aurois dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai, de même, compte des deux dixaines que je viens d'emprunter. Je continue donc, en disant 8 fois 9 font 72, & 2 que j'ai empruntés font 74 lesquels ôtés de 75, il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113 le chiffre 8 du dividende, & je continue de la même manière, en

difant en 11 combien de fois 9? 1 fois; puis 1 fois 2 fait 2, qui ôtés de 8, il refte 6; 1 fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il refte 0; 1 fois 9 eft 9, qui ôtés de 11, il refte 2. J'abaiffe le chiffre 4 à côté du refte 206, & je dis, en 20 combien de fois 9? 2 fois; & faifant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il refte 0; 2 fois 3 font 6, qui ôtés de 6, il refte 0; & enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il refte 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces divifions partielles, que le dividende contienne le divifeur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient; car fi l'on pouvoit feulement mettre 10, ce feroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, feroit faux, puifque la dixaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel, appartiendroit à ce premier quotient.

67. Si le dividende & le divifeur étoient fuivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un & à l'autre autant qu'il y en a à la fuite de celui qui en a le moins. Par exemple, pour divifer 8000 par 400, je diviferai feulement 80 par 4; car il eft évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la Division des Parties Décimales.

68. Pour ne point nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette règle seule.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun (cela ne changera rien à la valeur de ce nombre) (30); supprimez la virgule dans l'un & dans l'autre, & faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propose de diviser 12,52 par 4,3.

J'écris............ 12,52 | 4,3

Ou plutôt......... 12,52 | 4,30

en complettant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430; faisant l'opération,

1252	430
392	$2\frac{392}{430}$

Je trouve 2 pour quotient, & 392 pour reſte, c'eſt-à-dire, que le quotient eſt 2 & $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on ſe propoſe, quand on ſe ſert de décimales, eſt d'éviter les fractions ordinaires, au lieu d'écrire le reſte 392 ſous la forme de fraction, comme on vient de le faire, on continuera l'opération comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

1252	430
	2,9116
3920	
500	
700	
2700	
120	

Après avoir trouvé le quotient en entier, qui eſt ici 2, on mettra à côté du reſte 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reſte dix fois trop grand; on continuera de diviſer par 430, & ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entières, en mettant une virgule après le 2; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixièmes: après la multiplication & la ſouſtraction faites, on

mettra à côté du reste 50 un zéro, ce qui est la même chose que si l'on en avoit mis d'abord deux à côté du dividende; mais en mettant après 9, le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par-là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centièmes; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près; en poussant jusqu'à trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millième près, & ainsi de suite; puisqu'on n'auroit pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende & dans le diviseur ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres: c'est ce qu'il est aisé d'appercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus, le dividende 12,52, & le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centièmes & 430 centièmes, puisque les unités entières valent des centaines de centièmes (22); or il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes que 1252 unités ne

contiennent 430 unités; donc la considération de la virgule est inutile quand on a complетté le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connoître le quotient d'une division, que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abréger le calcul par la méthode suivante. Nous supposerons, d'abord, qu'on n'a pas besoin de connoître ce quotient qu'à une unité près: nous ferons voir ensuite comment on doit appliquer la méthode pour l'avoir aussi près qu'on voudra: voici la règle.

Supprimez, sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur: faites ensuite la division comme à l'ordinaire: s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient, autant de zéros, que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par ce diviseur dont vous aurez supprimé le dernier chiffre de la droite: après cette division, vous diviserez le nouveau reste, par le diviseur précédent dont vous supprimerez le dernier chiffre sur la droite; & vous continuerez ainsi de diviser, en supprimant, à chaque division, un chiffre sur la droite du diviseur.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8789236487, divisé par 64423. Je supprime les quatre derniers chiffres de la droite du dividende, & je divise 878923, par le diviseur proposé 64423.

878923	64423
234693	136430
41424·	·6442
2772·	·644
196·	·64
4·	·6

Je trouve, d'abord, 13 pour quotient, & 41424 pour reſte; je diviſe donc 41424, par 6442, en ſupprimant le dernier chiffre 3 du diviſeur: j'ai pour quotient 6, que j'écris à la ſuite du premier quotient 13; & le reſte eſt 2772, que je diviſe par 644, en ſupprimant encore un chiffre ſur la droite du diviſeur primitif: j'ai pour quotient 4, que j'écris à la ſuite du quotient principal 136; le reſte eſt 196, que je diviſe par 64, en ſupprimant encore un chiffre dans le diviſeur: le quotient eſt 3, & le reſte, 4. Enfin, je diviſe par 6, & j'ai 0 pour quotient; en ſorte que le quotient de 8789236487, diviſé par 64423, eſt 136430, à moins d'une unité près. En effet, le quotient exact eſt $136430\frac{6597}{64423}$.

Il n'eſt pas indiſpenſable d'écrire, à chaque fois, comme nous l'avons fait, le nouveau diviſeur; on peut ſe contenter de barrer, dans le diviſeur primitif, chaque chiffre à meſure qu'on paſſe à une nouvelle diviſion: ce n'a été que pour rendre l'opération plus ſenſible, que nous avons écrit ces diviſeurs à côté des reſtes ſucceſſifs.

70. Si le reſte de la première diviſion ſe trouvoit plus petit que n'eſt le diviſeur après qu'on en a ſupprimé le dernier chiffre, on mettroit zéro au quotient; & s'il ſe trouvoit encore plus petit que ne ſeroit ce diviſeur après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres reſtans, on mettroit encore un zéro au quotient, & ainſi de ſuite.

EXEMPLE.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 divisé par 643; je divise, comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reste après la suppression des deux derniers chiffres du dividende proposé.

```
551060 | 643
36660  | 85701
 4510
  009...64
   9...6
   3
```

J'ai pour quotient 857, & 9 pour reste: il faut donc diviser ce reste par 64 seulement; comme 9 ne contient pas ce diviseur, je mets 0 au quotient, & j'ai encore pour reste, 9, que je divise par 6 seulement; en sorte que le quotient cherché, est 85701, à moins d'une unité près.

71. Si, lorsqu'au commencement de l'opération, on supprime sur la droite du dividende, les chiffres que la règle prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161 ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime dans ce diviseur, les trois

derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161 ; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent,

```
    | 64
    |-----
161 | 25
 33...6
  3
```

& j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près : en effet, le quotient exact est $24\frac{62951}{64524}$, qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité, le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime est au-dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera, de même, d'une unité, le dernier des chiffres qui restent dans le dividende, après la suppression que la règle prescrit, si ceux-ci surpassent ou 5 ou 50, ou 500, selon qu'il y en a 1 ou 2, ou 3, &c.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627, divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il suit,

```
     | 1987
     |------
8658 | 4357
 710..199
 113..20
  13..2
```

C'est-à-dire,

C'eſt-à-dire, qu'au lieu de diviſer le reſte 710, par 198 ſeulement, je le diviſe par 199, parce que le dernier chiffre 7, que je ſupprime, eſt au-deſſus de 5. Même raiſon pour la diviſion ſuivante. Mais comme le dernier diviſeur 2, qui eſt contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13, eſt un peu trop fort, je mets 7 au quotient, pour compenſer.

73. Maintenant, il eſt facile de voir ce qu'il y a à faire, lorſqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement. Par exemple, ſi l'on vouloit avoir le quotient, à un dix-millième d'unité près; la queſtion ſe réduiroit à mettre autant de zéros (ici, ce ſeroit quatre) à la ſuite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient; après quoi on fera la diviſion ſelon la méthode actuelle. Et lorſqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en ſéparera ſur la droite, par une virgule, autant de chiffres, qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'un dix-millième d'unité près, le quotient de 6927 diviſé par 4532: je mets quatre zéros à la ſuite de 6927, & la queſtion ſe réduit à avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 69270000 diviſé par 4532; c'eſt-à-dire, conformément à la règle ci-deſſus, à diviſer 69270 par 4532, comme il ſuit,

69270	4532
23950	15285
1290···453	
384···45	
24···5	

le quotient cherché eſt donc 1,5285, à moins d'un dix-millième d'unité près.

S'il y avoit des décimales dans le dividende, ou dans le diviſeur, ou dans tous les deux, on les ramèneroit d'abord à n'en point avoir, ſelon ce qui a été dit (68); après quoi on opéreroit comme dans ce dernier exemple.

Donc ſi l'on vouloit réduire une fraction propoſée, en décimales, on y parviendroit promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Ainſi, ſi l'on veut réduire $\frac{4253}{9678}$ en décimales, & en avoir la valeur à moins d'un millième d'unité près, on aura 4253000 à diviſer par 9678; ce qui (69) ſe réduira à diviſer 4253 par 9678, ou (71) à diviſer 4253 par 968, ſelon la méthode actuelle. On trouvera donc 439; en ſorte qu'on aura 0,439 pour la valeur de $\frac{4253}{9678}$, à moins d'un millième près.

74. Il pourroit arriver néanmoins que le quotient trouvé d'après ces règles fût fautif de 1, 2 ou 3 unités dans le dernier chiffre. Quoique ce cas doive ſe rencontrer très-rarement, il n'eſt pas inutile de faire obſerver qu'on peut toujours le prévenir facilement, en ne ſéparant, au commencement de l'opération, ſur la droite du dividende, qu'autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviſeur: & opérant, du reſte, comme ci-deſſus. Lorſque le quotient ſera trouvé, on en ſupprimera le dernier chiffre, en obſervant d'ajouter une unité au dernier de ceux qui reſteront, ſi celui qu'on ſupprime eſt plus grand que 5.

Preuve de la Multiplication & de la Division.

75. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puisque dans la multiplication on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si l'on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est-à-dire (59), si l'on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver, pour quotient, le multiplicateur; & comme on peut prendre le multiplicande pour le multiplicateur, & *vice versâ*, en général, *si l'on divise le produit d'une multiplication, par l'un de ses facteurs, on doit trouver, pour quotient, l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je divise 17184 par 2864; je dois trouver & je trouve en effet, 6, pour quotient.

Pareillement, puisque le quotient d'une division marque combien de fois le dividende contient le diviseur, il s'ensuit que si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende lorsque la division a été faite sans reste, & que dans le cas où il y

á un reſte, ſi l'on multiplie le diviſeur par le quotient, & qu'au produit on ajoute le reſte de la diviſion, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-deſſus (63) que 189492, diviſé par 375, donnoit 505 pour quotient, & 117 pour reſte; en multipliant 375 par 505, on trouve 189375; auquel ajoutant le reſte 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainſi la multiplication & la diviſion peuvent ſe ſervir de preuve réciproquement.

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons expoſer: il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire; elles ſeront utiles dans beaucoup d'autres occaſions.

Preuve par 9.

76. Suppoſons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, & trouvé que le produit eſt 29736092, on veuille éprouver ſi ce produit eſt exact.

On ajoutera tous les chiffres 6, 5, 4, 9, 8 du multiplicande, comme s'ils ne contenoient que des unités ſimples, & on retranchera 9, à meſure qu'il ſe trouvera dans la ſomme; on aura un reſte qui ſera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4, 5, 4, du

multiplicateur, & retranchant pareillement tous les 9 que produira cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par le reste 4 du multiplicateur, & du produit 20, on retranchera les 9 qu'il peut renfermer; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2 de ce produit, & retranchant tous les 9, il ne reste aussi que 2; ce qui a lieu en effet.

Cette règle est fondée sur ce principe, que pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ses chiffres ajoutés comme des unités simples, donneroient après la suppression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéros, on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre, si de 400, ou de 5000, ou de 60000, vous retranchez tous les 9, le reste sera 4, ou 5, ou 6, &c. ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donneroit, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498 (qui est la même chose que 60000, plus 5000, plus 400, plus 90, plus 8), sera le même que celui que donneroient 6, plus 5, plus 4, plus 9, plus 8; c'est-à-dire, le même

que si l'on ajoutoit ses chiffres comme contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 & d'un reste 5, & que le multiplicateur 454 est composé aussi d'un certain nombre de 9 & d'un reste 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4, ou 20, que le produit total ne soit divisible par 9; ou, en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2, que le produit total ne soit divisible par 9: donc il doit rester au produit la même quantité que dans le produit des deux restes après la suppression des 9 qu'il renferme.

On pourroit faire aussi cette preuve de la même manière par le nombre 3.

A l'égard de la division, elle devient facile à éprouver, après ce qui a été dit (70). Après avoir ôté du dividende, le reste qu'a donné la division, on regardera le résultat comme un produit dont le diviseur & le quotient sont les facteurs; & par conséquent on y appliquera la preuve par 9, de la même manière qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'est pas infaillible, parce que, dans la multiplication, par exemple, si l'on s'étoit

trompé de quelques unités ſur quelque chiffre du produit, & qu'en même temps on eût fait une erreur égale, mais en ſens contraire, ſur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changeroit rien au reſte que l'on auroit après la ſuppreſſion des 9, cette règle ne feroit point appercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainſi qu'on le voit, au moins deux erreurs, & deux erreurs qui ſe compenſent, ou qui ne diffèrent que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification ſeroit fautive, ſeront très-rares dans l'uſage.

Quelques uſages de la Règle précédente.

77. La diviſion ſert non-ſeulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, &c. d'un nombre; c'eſt diviſer ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, &c. ou le partager en 2, 3, 4, 5, 20, 30, &c. parties égales, pour prendre une de ces parties.

La diviſion ſert encore à convertir les unités d'une certaine eſpèce, en unités d'une eſpèce ſupérieure; par exemple, un certain nombre de deniers en ſols, & ceux-ci en livres. Pour réduire 5864 deniers en ſols, on remarquera que puiſqu'il faut 12 deniers pour faire un ſol, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de ſols; il faut

donc divifer par 12, & on trouvera 488 f. & 8 den. de refte. Pour réduire en livres les 488 fols, on divifera 488 par 20, puifqu'il faut 20 fols pour faire la livre, & on aura en total 24 liv. 8 fols 8 deniers.

A l'occafion de cette divifion par 20, remarquons que quand on a à divifer par un nombre fuivi de zéros, on peut abréger l'opération en féparant fur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros; on divife la partie qui refte à gauche, par les chiffres fignificatifs du divifeur; s'il y a un refte, on écrit à fa fuite, les chiffres qu'on a féparés, ce qui donne le refte total. Par exemple, pour divifer 5834, par 20; je fépare le dernier chiffre 4, & je divife par 2, la partie reftante 583; j'ai pour quotient 291, & 1 pour refte; j'écris à côté de ce refte 1, le chiffre féparé 4, ce qui me donne 14 pour refte total; en forte que le quotient eft 291 $\frac{14}{20}$.

Cette abréviation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids: fi l'on fait que la charge eft de 2584954 livres; pour la réduire en tonneaux, c'eft-à-dire, pour divifer par 2000, on féparera les trois derniers chiffres de la droite, & prenant la moitié des autres, on aura 1292 tonneaux & 954 livres.

Quand on veut évaluer en livres & sols le vingtième d'un nombre de livres proposé, il suit de cette règle, que l'opération se réduit à compter le dernier chiffre pour des sols, & prendre moitié des autres chiffres que l'on comptera pour des livres. Si, en prenant cette moitié, il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sols qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtième de 54672 livres, on séparera le dernier chiffre 2 que l'on comptera pour 2 sols; & prenant la moitié de 5467, qui est 2733 avec une unité de reste, on écrira 2733 livres 12 sols: la raison de cette régle est évidente en faisant attention que 54672 liv. est 54660 livres plus 12 livres; or le vingtième de 54660 est évidemment 2733, & celui de 12 liv. est 12 sols, puisque le vingtième d'une liv. est 1 sol. S'il y avoit des sols & deniers dans la somme proposée, on négligeroit les derniers, dont la vingtième partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sols, on les tripleroit; & prenant le cinquième, on le porteroit aux deniers. Ainsi le vingtième de 54672 livres 17 sols 7 deniers, est 2733 livres 12 sols 10 deniers.

S'il s'agissoit d'avoir le dixième d'un nombre de livres, on sépareroit le dernier chiffre, & l'ayant doublé, on le compteroit pour des sols; & on compteroit comme des livres, tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixième de 67987 livres est 6798 livres 14 sols. La raison pour laquelle on double le dernier chiffre, est que le dixième d'une livre est 2 sols.

On a assez souvent besoin de prendre les quatre deniers pour livre, d'une somme proposée: cela se réduit à en prendre d'abord le vingtième comme il vient d'être dit; puis prendre

le tiers de ce vingtième. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtième qui est 438 livres 2 sols, dont le tiers 146 livres 0 sols 8 deniers forme les quatre deniers pour livre de 8762 livres. En effet, les quatre deniers pour livre, ne sont autre chose que le soixantième; puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantième est le tiers du vingtième.

Des Fractions.

78. Les fractions considérées arithmétiquement sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre d'unités plus petites, comme l'on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties ou de vingt unités plus petites qu'on appelle sols.

Une ou plusieurs de ces parties forment ce qu'on appelle une fraction de l'unité. On donne aussi ce nom aux nombres qui représentent ces parties.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme

les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit ; mais alors on donne un nom particulier à ces parties : ainsi pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploieroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 sols, & on écriroit 7^{s} : cette manière de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

80. Mais comme il faudroit un signe particulier pour chaque division qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes en marquant une fraction par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, & séparés par un trait. Ainsi, pour marquer les 7 parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité ; & on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle *le numérateur*) ; ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle *le dénominateur*) ; mais on ajoute au nom de celui-ci la terminaison *ième* : par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$, on prononcera *sept vingtièmes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes* ; & par cette expression

quatre cinquièmes, on doit entendre quatre parties, dont il en faudroit cinq pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2, ou 3, ou 4, qui se prononcent, *moitiés* ou *demis*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceroient *un demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction contient de parties de l'unité; & le dénominateur fait connoître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut pour composer l'unité. On lui donne le nom de dénominateur, parce que c'est lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, & qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ & $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, & les parties de la seconde des *septièmes*.

83. Le numérateur & le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers considérés sous la forme de Fraction.

84. Les opérations qu'on fait sur les fractions, conduisent souvent à des résultats fractionnaires dont

le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, par exemple, à des réſultats tels que $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$, &c.

Ces ſortes d'expreſſions ne ſont pas des fractions proprement dites, mais ce ſont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviſer le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, & le reſte de la diviſion ſera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainſi $\frac{27}{5}$ donneront $5\frac{2}{5}$, c'eſt-à-dire, cinq entiers & deux cinquièmes.

En effet, dans l'expreſſion $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5 fait connoître que l'unité eſt compoſée de 5 parties; donc autant de fois qu'il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications & les diviſions des nombres entiers joints aux fractions exigent, du moins pour la facilité, qu'on convertiſſe ces entiers en fractions.

On fait cette converſion en multipliant le nombre entier, par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier. Par exemple, ſi on veut convertir 8 entiers en cinquièmes, on multipliera 8 par 5, & on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorſqu'on veut

convertir 8 en cinquièmes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties; les 8 unités en contiendront donc 40 : pareillement $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une Fraction sans changer sa valeur.

87. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, & plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

88. Donc on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, &c. sans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, &c.

On peut donc dire en général qu'*une fraction ne change point de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Ainsi, $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, &c.

89. Par un raisonnement semblable, on voit que moins on supposera de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même

quantité ; que par conséquent on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, &c. fois plus petit, pourvu qu'en même temps on rende son numérateur 2, 3, 4, &c. fois plus petit ; & en général, *une fraction ne change point de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeler ce que c'est que le dénominateur, & ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc que multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction ; puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser, sont la base des deux réductions suivantes, qui sont d'un très-grand usage.

Réduction des Fractions à un même Dénominateur.

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la seconde, & les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 & 3, qui ſont les deux termes de la première fraction, chacun par 4, dénominateur de la ſeconde, & j'ai $\frac{8}{12}$, qui (88) eſt de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie de même les deux termes 3 & 4 de la ſeconde fraction, chacun par 3, dénominateur de la première, & j'ai $\frac{9}{12}$, qui eſt de même valeur que $\frac{3}{4}$; en ſorte que les fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ ſont changées en $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, qui ſont reſpectivement de même valeur que celles-là, & qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il eſt aiſé de voir que par cette méthode le dénominateur ſera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions, puiſque dans chaque opération le nouveau dénominateur eſt formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2°. Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune, par le produit réſultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je multiplierai les deux termes 2 & 3 de la première, par le produit

produit des trois dénominateurs 4, 5, 7 des autres fractions, produit que je trouve en disant : 4 fois 5 font 20, puis 7 fois 20 font 140; je multiplie donc 2 & 3, chacun par 140, & j'ai $\frac{280}{420}$, qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (88).

Je multiplie pareillement les deux termes 3 & 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7, produit que je forme en disant: 3 fois 5 font 15, puis 7 fois 15 font 105; je multiplie donc 3 & 4 chacun par 105, ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisième fraction, je multiplie ses deux termes 4 & 5 chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 & 7, & j'ai $\frac{336}{420}$ au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin pour la quatrième, je multiplierai 5 & 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5 des trois premières fractions, & j'aurai $\frac{300}{420}$ au lieu de $\frac{5}{7}$, en sorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ sont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins simples, à la vérité, que celles-là, mais de même valeur qu'elles, & plus susceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition & de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction étant formé du produit de tous les

dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

Réduction des Fractions à leur plus simple expression.

92. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée, à être exprimée par de moindres nombres, & cela lorsque son numérateur & son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'est une simplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faudra suivre.

93. On divisera le numérateur & le dénominateur, chacun par 2, & on répétera cette division tant qu'elle pourra se faire exactement.

On divisera ensuite les deux termes par 3, & on continuera de diviser l'un & l'autre par 3, tant que cela pourra se faire.

On fera la même chose successivement avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, &c. c'est-à-dire, avec les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, & qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, &c.

On pourra dans cette recherche s'aider des principes suivans.

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble comme s'ils étaient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire, un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3. Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres ajoutés ensemble font 9, ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 se démontre comme celle du nombre 9 à très-peu de chose près, & l'un & l'autre se démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro, est divisible par 5.

A l'égard du nombre 7 & des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division, il faudra essayer la division.

Propoſons-nous, pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je diviſe les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun ſont pairs, & j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je diviſe encore par 2 & j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-deſſus, m'apprend que je puis diviſer par 3; je diviſe en effet & j'ai $\frac{168}{483}$; je diviſe encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'eſſaye de diviſer par 7; la diviſion réuſſit & me donne $\frac{8}{23}$.

La raiſon pour laquelle nous preſcrivons de ne tenter la diviſion que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, &c. c'eſt qu'après avoir épuiſé la diviſion par 2, par exemple, il eſt inutile de tenter de diviſer par 4, puiſque ſi celle-ci pouvoit réuſſir, à plus forte raiſon la diviſion par 2 auroit-elle pu encore ſe faire.

95. De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expreſſion plus ſimple, le plus direct eſt celui de diviſer les deux termes par le plus grand diviſeur commun qu'ils puiſſent avoir: voici la règle pour trouver ce plus grand commun diviſeur.

Diviſez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reſte, c'eſt le plus petit terme qui eſt le plus grand diviſeur commun.

S'il y a un reſte, diviſez le plus petit terme par ce reſte, & ſi la diviſion ſe fait exactement, c'eſt ce premier reſte qui eſt le plus grand diviſeur commun.

Si cette ſeconde diviſion donne un reſte, diviſez le premier reſte par le ſecond, & continuez toujours de diviſer le reſte précédent par le dernier reſte juſqu'à ce que vous arriviez à une diviſion exacte. Alors le dernier diviſeur que vous aurez employé, ſera le plus grand diviſeur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviſeur ſe trouve être l'unité, c'eſt une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je diviſe 9024 par 3760; j'ai pour quotient 2, & pour reſte 1504.

Je diviſe 3760 par 1504; j'ai pour quotient 2, & pour reſte 752.

Je diviſe le premier reſte 1504 par le ſecond reſte 752; la diviſion réuſſit, & j'en conclus que 752 peut diviſer les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, & la réduire à ſa plus ſimple expreſſion qu'on trouve, en faiſant l'opération, être $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 diviſe 1504; il doit donc diviſer 3760 qu'on a vu être compoſé de deux fois 1504 & de 752: on voit de même, qu'il doit diviſer 9024, puiſque 9024 eſt compoſé de deux fois 3760 & de 1504.

On voit de plus, que 752 eſt le plus grand diviſeur commun que puiſſent avoir 3760 & 9024; car il ne peut y avoir de diviſeur commun entre 9024 & 3760 qui ne le ſoit en même temps de 3760 & 1504; & entre ces deux-ci, il ne peut y en avoir un qui ne ſoit en même temps diviſeur commun de 1504 & de 752; mais il eſt évident qu'entre ces deux-ci, il ne peut y avoir de diviſeur commun plus grand que 752; donc, &c.

Différentes manières dont on peut envisager une fraction, & conséquences qu'on peut en tirer.

96. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici d'une fraction, est que le dénominateur représente de combien de parties l'unité est composée; & le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur. Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4 comme représentant quatre choses quelconques; 4 livres, par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 livres en cinq parties pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties pour prendre 4 de ces parties.

97. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction comme un dividende, & le dénominateur comme un diviseur. On voit par-là, ce que signifient les restes de division mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il suit de-là 1°. qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier le numérateur, & lui donnant l'unité pour dénominateur; ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

99. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque en décimales, il n'y a qu'à considérer le numérateur comme un reste de division où le dénominateur étoit diviseur, & opérer par conséquent, comme il a été dit (p. 59), en observant de mettre d'abord un zéro au quotient pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent en décimales 0,6, que $\frac{5}{9}$ valent 0,555, &c. que $\frac{1}{25}$ vaut 0,04, & ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales, tout nombre complexe proposé. Par exemple, s'il s'agit de réduire $3^T\ 5^P\ 8^p\ 7^l$ en décimales de la toise, de manière à ne pas négliger une demi-ligne : j'observe que la toise contient 864 lignes, & par conséquent 1728 demi-lignes; il faut donc, pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des millièmes; c'est-à-dire, jusqu'aux dix-millièmes.

Cela posé, je réduis les $5^P\ 8^p\ 7^l$ tout en lignes; & j'ai 823 lignes ou $\frac{823}{864}$ de la toise : réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit,

on a 0,9525, & par conféquent 3T,9525, pour le nombre propofé.

Des opérations de l'Arithmétique fur les Fractions.

100. On fait fur les fractions les mêmes opérations que fur les nombres entiers. Les deux premières opérations, l'addition & la fouftraction, exigent le plus fouvent une opération préparatoire; les deux autres n'en exigent point.

De l'addition des Fractions.

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, & on donnera à la fomme, le dénominateur commun de ces fractions. Ainfi pour ajouter $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 & 5, & j'ai par conféquent $\frac{10}{7}$ que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enfeigné (90) & (91), après quoi on ajoutera ces nouvelles fractions de la manière qui vient d'être prefcrite. Ainfi fi l'on propofe d'ajouter $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, je change ces trois fractions en ces trois autres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, dont la fomme $\frac{133}{60}$ qui fe réduit à $2\frac{13}{60}$ (85).

De la soustraction des Fractions.

103. Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre; & on donnera au reste, le dénominateur commun de ces deux fractions. S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reste sera $\frac{3}{9}$, qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (93).

104. Si de $9\frac{5}{8}$ on vouloit retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunteroit sur 9 une unité, laquelle réduite en huitièmes & ajoutée à $\frac{5}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$, desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resteroit $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4 de 8 qui restent après l'emprunt, il resteroit en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90) & (91), après quoi on fera la soustraction comme il vient d'être dit. Ainsi pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$; & retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la multiplication des Fractions.

106. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, & le dénominateur par le dénominateur.* Par

exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur, & par conséquent $\frac{8}{15}$ pour le produit.

Pour ſentir la raiſon de cette règle, il faut ſe rappeler que multiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainſi multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'eſt prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$, ou, plus exactement, c'eſt prendre 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3 par 5, on change les tiers en quinzièmes, c'eſt-à-dire, en parties cinq fois plus petites; & en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc en effet $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si l'on avoit un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier, on mettroit l'entier ſous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; par exemple, ſi j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$, cela ſe réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, ſelon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui ſe réduiſent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, l'opération

se réduit à multiplier le numérateur de cette fraction, par l'entier.

108. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, il faudroit, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne; par exemple, si l'on a $12\frac{3}{5}$ à multiplier par $9\frac{3}{4}$, je change (86) le multiplicande en $\frac{63}{5}$, & le multiplicateur en $\frac{39}{4}$; & je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$, selon la règle ci-dessus (106), ce qui me donne $\frac{2457}{20}$ qui valent $122\frac{17}{20}$.

Division des Fractions.

109. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, & multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainsi renversée.*

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, selon la règle donnée (106), & j'ai $\frac{12}{10}$ ou $1\frac{2}{10}$ pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour appercevoir la raison de cette règle, il faut observer que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$: or il est facile de voir que, puisque le diviseur est 2 tiers, il sera contenu dans

le dividende trois fois autant que s'il étoit 2 entiers; donc il faut divifer d'abord par 2, & multiplier enfuite par 3, ce qui n'eft autre chofe que prendre trois fois la moitié du dividende, ou le multiplier par $\frac{3}{2}$ qui eft la fraction divifeur renverfée.

110. Si l'on avoit une fraction à divifer par un entier, ou un entier à divifer par une fraction, on commenceroit par mettre l'entier fous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur: par exemple, fi l'on a 12 à divifer par $\frac{5}{7}$, on réduira l'opération à divifer $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, felon la règle qu'on vient de donner, fe réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, & donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$. Pareillement, fi l'on avoit $\frac{3}{4}$ à divifer par 5, on réduiroit l'opération à divifer $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, c'eft-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorfqu'on a une fraction à divifer par un entier, l'opération fe réduit à multiplier le dénominateur, par cet entier.

111. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on réduiroit ces entiers chacun en fraction de même efpèce que celle qui l'accompagne: par exemple, fi l'on avoit $54\frac{3}{5}$ à divifer par $12\frac{2}{3}$, on changeroit le dividende en $\frac{273}{5}$, & le divifeur en $\frac{38}{3}$, &

l'opération feroit réduite à divifer $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$, c'eft-à-dire (109), à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$, ce qui donneroit $\frac{819}{190}$, ou $4\frac{59}{190}$.

Quelques applications des Règles précédentes.

112. Après ce que nous avons dit (96), il eft aifé de voir comment on peut évaluer une fraction. Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puifque les $\frac{5}{7}$ d'une livre font la même chofe (96) que le feptième de 5 livres, je réduis les 5 livres en fols (57), & je divife les 100 fols qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 fols pour quotient & 2 fols de refte; je réduis ces 2 fols en deniers, & je divife 24 deniers par 7, j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$; ainfi les $\frac{5}{7}$ d'une livre, font 14 fols 3 deniers & $\frac{3}{7}$ de denier.

Si l'on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il eft vifible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, & multiplier enfuite par 24, ce qu'auroit donné cette opération; mais il eft plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (107) donne $\frac{120}{7}$ livre, & d'évaluer enfuite cette dernière fraction qu'on trouvera valoir 17 liv. 2 fols 10 deniers $\frac{2}{7}$.

113. Les fractions décimales n'ayant point de

dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer : si l'on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toise ; comme la toise est de 6 pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds ; c'est-à-dire, 3^{p} & 0,192 de pied ; multipliant cette dernière fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire, 2^{p} & 0,304 de pouce ; enfin multipliant celle-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou 3^{l} & 0,648 de ligne ; c'est-à-dire, que la valeur de la fraction 0,532 de toise, sera 3^{p} 2^{p} 3^{l} & 0,648 de ligne.

114. L'évaluation des fractions nous conduit naturellement à parler des *fractions* de *fractions* : on appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de* ; par exemple, $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entr'eux, & tous les dénominateurs entr'eux ; en sorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$; la fraction $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$. Pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; & ce qu'on vient

de dire, fait connoître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si l'on demandoit les $\frac{3}{4}$ *de* 5 $\frac{3}{8}$, on convertiroit l'entier 5 en huitièmes, & la queſtion ſeroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$ qu'on trouveroit être $\frac{129}{32}$ ou 4 $\frac{1}{32}$.

Ajoutons à tout ce que nous avons dit ſur les fractions, un exemple qui renferme pluſieurs des règles que nous avons établies.

Suppoſons qu'on veut conſtruire un Vaiſſeau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur; que les diſtances entre les ſabords, en y comprenant l'eſpace entre le premier ſabord & la rablure de l'étrave, & l'eſpace entre le dernier ſabord & la rablure de l'étambot, faſſent 108 $\frac{3}{4}$ pieds; on demande ſi l'on peut percer 12 ſabords à la première batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$, je retranche 108 $\frac{3}{4}$ (103 & *ſuiv.*) il me reſte 31 $\frac{11}{12}$ pour les ſabords; je diviſe 31 $\frac{11}{12}$ par 12, c'eſt-à-dire, $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) & (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds & $\frac{95}{144}$, fraction qui, évaluée en pouces & lignes, vaut 7 pouces 11 lignes; ainſi il faudroit donner à chaque ſabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'eſt-à-dire, 2 pieds 8 pouces à peu près, ce qui eſt une meſure convenable pour un Vaiſſeau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorſqu'une fraction exprimée par des nombres un peu conſidérables, n'eſt pas réductible par la méthode donnée (95), & qu'on peut ſe contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode ſuivante qui donne alternativement des fractions plus grandes & plus petites que la propoſée, mais toujours de plus en plus approchées, en ſorte qu'à la dernière opération, on retombe ſur la fraction propoſée. Prenons, par exemple, la fraction $\frac{100000}{314159}$ qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du diamètre à la circonférence; & propoſons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions moins exactes, à la vérité, mais exprimées par des nombres plus ſimples.

Diviſez le numérateur & le dénominateur, par le numérateur; vous aurez $\frac{1}{3\frac{14159}{100000}}$. Pour avoir une première valeur approchée, négligez la fraction qui accompagne 3, & vous aurez $\frac{1}{3}$ pour première valeur approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée, diviſez le numérateur & le dénominateur de la fraction qui accompagne 3, chacun par le numérateur de cette fraction, & vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{887}{14159}}}$; négligez la fraction qui accompagne 7, & vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (86) $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (109) $\frac{7}{22}$ pour ſeconde valeur, qui eſt plus approchée que la première, mais un peu trop foible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, diviſez le numérateur & le dénominateur de la fraction qui accompagne 7, chacun par le numérateur de cette fraction; vous aurez

aurez $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15\frac{854}{887}}}}$: ſupprimez la fraction qui accompagne 15, & vous aurez $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}}$ qui revient à $\frac{106}{333}$, valeur plus approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, diviſez les deux termes de la fraction qui accompagne 15, chacun par le numérateur 854, & vous aurez $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1\frac{33}{854}}}}}$; négligeant la fraction $\frac{33}{854}$, vous aurez pour valeur plus approchée, $\frac{113}{355}$, mais qui eſt un peu trop foible. On voit à préſent comment on peut continuer.

Des Nombres complexes.

116. Quoique les règles que nous avons expoſées juſqu'ici, puiſſent ſervir auſſi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir conſidérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la diviſion qu'on y fait de l'unité principale, en facilite ſouvent le calcul.

Il y a pluſieurs ſortes de nombres complexes, & les règles pour les calculer tiennent beaucoup à la diviſion qu'on a faite de l'unité : cependant il n'eſt pas néceſſaire d'examiner toutes ces eſpèces pour être en état de les calculer ; mais il importe de ſavoir quels rapports leurs différentes parties ont, tant entr'elles qu'à l'égard de l'unité principale ; c'eſt par

cette raiſon que nous donnons ici une Table des nombres complexes dont l'uſage eſt le plus fréquent.

TABLE des Unités de quelques eſpèces, & caractères par leſquels on repréſente ces différentes unités.

POUR LES MONNOIES.

₶ ſignifie ········ livre.	1 livre vaut ·· 20 ſols.
ſ ·············· ſol.	1 ſol vaut ··· 12 deniers.

POUR LES POIDS.

℔ ſignifie ······· livre.	1 livre (poids) vaut 2 marcs.
M ············· marc.	1 marc ······· 8 onces.
O ou ℥ ········ once.	1 once ······· 8 gros.
G ou ʒ ········· gros.	1 gros 3 deniers ou ſcrupules.
D ou ℈ ·· denier ou ſcrupule.	1 denier ····· 24 grains.
g ·············· grain.	

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

T ſignifie ······· toiſe.	1 toiſe vaut ··· 6 pieds.
P ·············· pied.	1 pied ······· 12 pouces.
p ·············· pouce.	1 pouce ····· 12 lignes.
l ·············· ligne.	1 ligne ······ 12 points.
pt ············· point.	

POUR LE TEMPS.

J ſignifie ········ jour.	1 jour vaut ··· 24 heures.
H ············· heure.	1 heure ······ 60 minutes.
′ ············· minute.	1 minute ····· 60 ſecondes.
″ ············· ſeconde.	1 ſeconde ···· 60 tierces.

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies & aux capacités des Corps.

Addition des Nombres complexes.

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés, les uns au-dessous des autres, de manière que toutes les parties d'une même espèce se trouvent chacune dans une même colonne verticale ; & après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espèce la plus petite ; si leur somme ne compose pas une unité de l'espèce immédiatement supérieure, on l'écrit sous les unités de son espèce ; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, on n'écrit, au-dessous de cette colonne, que l'excédent d'un nombre juste d'unités de cette seconde espèce, & on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables sur lesquelles on procède de la même manière.

EXEMPLE Ier.

On propose d'ajouter...	227#	14^f	8^d
	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979#	15^f	7^d somme.

La somme des deniers est 31 qui renferme 2 douzaines de deniers ou 2 sols & 7 deniers ; je pose les 7 deniers & je retiens 2 sols que j'ajoute avec les unités de sols, ce qui donne 15 sols, dont je pose seulement le chiffre 5, & je retiens la dixaine pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5 ; & comme il faut 2 dixaines de sols pour faire une livre, je prends la moitié de 5 qui est 2, avec 1 pour reste ; je pose ce reste, & je porte les 2 livres à la colonne des livres que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

On propose d'ajouter......	54^T	2^P	3^p	9^l
	12	5	4	11
	9	4	11	11
	8	2	9	10
	85^T	3^P	6^p	5^l

La somme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes ; je pose 5 lignes & je retiens les 3 pouces que j'ajoute avec les pouces ; le tout me donne 30 qui valent 2 pieds 6 pouces ; je pose les 6 pouces & je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds qui valent 2^T 3^P ; je pose les 3^P & j'ajoute les deux toises avec les toises ; le tout monte à 85, en sorte que la somme est 85^T 3^P 6^p 5^l.

Soustraction des Nombres complexes.

118. Écrivez les nombres proposés, comme dans l'addition, & commencez la soustraction par les unités de l'espèce la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous. S'il ne peut en être retranché, empruntez sur l'espèce immédiatement supérieure, une unité que vous réduirez à l'espèce dont il s'agit, & que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espèce; & lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin écrivez chaque reste, à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE Ier.

De................	143#	17^{f}	6^{d}	
on veut ôter......	75#	12^{f}	9^{d}	
	68#	4^{f}	9^{d}	reste.

Ne pouvant ôter 9^{d} de 6^{d}, j'emprunte 1^{f} qui vaut 12^{d}, & 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite 12^{f} non pas de 17^{f}, mais de 16 qui restent après l'emprunt, & il reste 4; enfin je retranche 75# de 143# & il me reste 68#.

EXEMPLE II.

De..............	$163^{\#}$	0^{s}	5^{d}	
on veut ôter....	$84^{\#}$	18^{s}	9^{d}	
	$78^{\#}$	1^{s}	8^{d}	reste.

Comme je ne puis ôter 9^{d} de 5^{d}, & que d'ailleurs il n'y a pas de sols sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte 1 livre sur 163 livres, mais j'en laisse, par la pensée, 19 sols à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

119. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction, multiplication dont nous avons donné la règle (106). Par exemple, si l'on demande ce que doivent coûter 54^{T} 3^{P} d'ouvrage, à raison de 42 liv. 17 sols 8 den. la toise; on peut réduire le multiplicande 42 liv. 17 sols 8 deniers tout en deniers (57); ce qui donnera 10292 deniers, & comme le denier est la 240e partie de la livre, le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre; pareillement on réduira le multiplicateur 54^{T} 3^{P} tout en pieds, ce qui donnera 327^{P}, & comme le pied est la sixième partie de la toise, on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de

toise, en sorte que la question est réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ de livre par $\frac{327}{6}$, ce qui (106) donnera $\frac{3365484}{1440}$ de livre, qui (112) valent 2337 livres 2 sols 10 deniers.

Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer ; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit partie *aliquote* de cet autre : ainsi 3 est partie aliquote de 12 ; il en est de même de 2, de 4 & de 6.

Rappelons-nous que multiplier n'étant autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois ; multiplier par $8\frac{3}{4}$, par exemple, c'est prendre le multiplicande 8 fois, & le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois ; ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$, ou en prenant d'abord le quart, & l'écrivant 3 fois, ou bien en prenant d'abord la moitié, & ensuite la moitié de cette moitié : ainsi pour multiplier 84 par $8\frac{3}{4}$, j'écrirois........ 84

$$\begin{array}{r} 84 \\ 8\frac{3}{4} \\ \hline 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$ produit.

Et multipliant 84 par 8, j'aurois d'abord 672. Ensuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrois d'abord la moitié qui est 42 ; puis pour prendre pour le quart restant, je prendrois la moitié de 42 qui est 21, & réunissant ces trois produits particuliers, j'aurois 735 pour le produit total.

121. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes espèces d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres, & à l'égard de cette unité principale ; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire en sorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que ces parties aliquotes puissent être employées commodément ; ou de les décomposer en parties aliquotes les unes des autres ; & si cette décomposition ne fournit que des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléra par de faux produits ; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans.

EXEMPLE Ier.

On demande combien doivent coûter $54^{T}\ 3^{P}$ à raison de 72 livres la toise.

Il faut multiplier.....	$72^{\#}$		
par..........	54^{T}	3^{P}	
	$288^{\#}$	0^{f}	0^{d}
	360		
	36		
	$3924^{\#}$	0^{f}	0^{d}

On multipliera d'abord, selon les règles ordinaires, 72 livres par 54. Ensuite pour multiplier par 3^{P} qui sont la moitié de la toise, & qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise, on prendra la moitié de 72 livres, & additionnant, on aura $3924^{\#}$ pour produit total.

EXEMPLE II.

Si on avoit.............	$72^{\#}$		
à multiplier par...........	54^{T}	5^{P}	
	$288^{\#}$	0^{f}	0^{d}
	360		
	36		
	24		
	$3948^{\#}$	0^{f}	0^{d}

On multipliera d'abord 72 livres par 54. Ensuite au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{6}$ de la toise, on décomposera 5^{P}, en 3^{P} & 2^{P},

dont le premier eſt la moitié, & le ſecond le $\frac{1}{3}$ de la toiſe; on prendra donc d'abord la moitié de 72 livres, & enſuite le $\frac{1}{3}$ de 72 livres, & on aura, en réuniſſant tous ces produits particuliers, 3948 livres pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait............	72^{tt}
à multiplier par...........	$5^T\ 4^p\ 8^p$
	$360^{tt}\ 0^f\ 0^d$
	36
	12
	4
	4
	$416^{tt}\ 0^f\ 0^d$

Après avoir multiplié par 5^T, on multipliera par 4^p, & pour cet effet on décompoſera ce nombre en 3^p & 1^p; pour 3^p on prendra la moitié de 72 livres, qui eſt 36 livres, & pour un pied, on remarquera que c'eſt le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, & par conſéquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 liv. qui eſt 12 livres. Enſuite pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toiſe, on les comparera au pied, & on les décompoſera en 4 pouces, & 4 pouces qui ſont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, & qui par conſéquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 livres.

Enfin réunissant, on aura 416 liv. 0 sols 0 deniers pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a................	$72^{\#}$	6^{f}	6^{d}
à multiplier par...........	27^{T}	4^{P}	8^{p}
	$504^{\#}$	0^{f}	0^{d}
	144		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	$2009^{\#}$	0^{f}	$6^{d}\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 livres par 27. Ensuite pour multiplier 6 sols par 27, on décomposera ces 6 sols en 5 sols & 1 sol. Les 5 sols faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27, donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 livres; on prendra donc le quart de 27 livres,

qui eſt 6 livres 15 ſols. Pour multiplier 1 ſol par 27, on remarquera qu'un ſol eſt la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainſi on prendra le cinquième des 6 livres 15 ſols, qui ſera 1 livre 7 ſols.

A l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils ſont la moitié d'un ſol, & par conſéquent on prendra la moitié de 1 livre 7 ſols qu'on a eu pour un ſol.

Juſques-là tout le multiplicande eſt multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent, c'eſt-à-dire, que pour les 4^p, on prendra d'abord pour 3^p, la moitié, 36 liv. 3 ſols 3 deniers, du multiplicande, & pour 1^p le tiers de ce que donnent les 3^p.

Enfin pour 8^p, on prendra 2 fois pour 4, c'eſt-à-dire, qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1^p; en réuniſſant toutes ces différentes parties, on aura 2009 livres 0^f $6^d \frac{2}{3}$ pour produit total.

123. Juſqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été aſſez faciles à évaluer; mais dans les cas où ces parties ſeroient plus compoſées, on ſe conduiroit comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE V.

A raiſon de............ 34# 10ſ 2d la toiſe,
combien doivent coûter..... 17T

238#	0ſ	0d
34		
	8	10
	~~0~~	~~17~~
	0	2 10
586#	12ſ	10d

Après avoir multiplié 34 liv. par 17, & enſuite les 10 ſols par 17 en prenant moitié de 17; on multipliera 2 deniers qui ſont la ſixième partie d'un ſol, & par conſéquent la ſixième partie de la dixième partie, ou (114) la 60e partie de 10 ſols; mais au lieu de prendre la 60e partie de 8 liv. 10 ſols, il ſera plus commode de faire un faux produit, & de prendre d'abord le dixième de ce qu'ont donné 10 ſols, c'eſt-à-dire, le dixième de 8 liv. 10 ſols; ce dixième qui eſt 0 liv. 17 ſols, eſt pour 1 ſol; mais comme il ne faut que pour le ſixième d'un ſol, on barrera ce faux produit, & on en écrira le ſixième au-deſſous.

EXEMPLE VI.

Combien, pour 34 liv. 10 ſols 2 deniers, fera-t-on faire d'ouvrage, à raiſon de 1 liv. pour 17 toiſes?

Il faut multiplier 17 toises par 34 livres 10 sols 2 deniers, c'est-à-dire, prendre 17 toises autant de fois que la livre est contenue dans 34 liv. 10 sols 2 deniers.

17^{T}					
34^{*}	10^{s}	2^{d}			
68^{T}	0^{P}	0^{p}	0^{l}	0^{pts}	
51					
8	3				
~~0~~	~~5~~	~~1~~	~~2~~	~~4~~	~~$\frac{4}{5}$~~
0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
586^{T}	3^{P}	10^{p}	2^{l}	$4^{pts}\frac{4}{5}$	

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34; ensuite pour multiplier 17 toises par 10 sols, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sols sont la moitié de la livre, & on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donneroit 1 sol, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sols; ce dixième est 0 toises 5 pieds 1 pouce 2 lignes 4 points & $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de points; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixième pour avoir le produit de 2 deniers, & on écrira au-dessous ce sixième qui est 0 toises 0 pieds 10 pouces 2 lignes 4 points & $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement, pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets : en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises & 34 livres 10 sols 2 deniers ; cependant les deux produits sont différens.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplexe.

124. Si le dividende seul est complexe, & si en même temps le dividende & le diviseur ont des unités de différente espèce, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la règle ordinaire ; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espèce, qu'on ajoutera avec celles de même espèce qui se trouveront dans le dividende, & on divisera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisième espèce, auxquelles on ajoutera celles de la même espèce qui se trouveront dans le dividende, & on divisera le tout comme ci-dessus ; on continuera de réduire les restes, en unités de l'espèce suivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE.

On a donné 4783 livres 3 ſols 9 deniers pour paiement de 87 toiſes d'ouvrage ; on demande à combien cela revient la toiſe.

$4783^{\#}\ 3^{f}\ 9^{d}$	87
433	$54^{\#}\ 19^{f}\ 7^{d}$
85	
1703^{f}	
833	
50	
609^{d}	
000	

Il faut diviſer 4783 livres 3 ſols 9 deniers par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 livres diviſées par 87, ſelon la règle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, & 85 livres pour reſte : ces 85 livres réduites en ſols (57), donneront avec les 3 ſols du dividende 1703 ſols, qui, diviſés par 87, donneront 19 ſols pour quotient, & 50 ſols pour reſte : ces 50 ſols réduits en deniers, donnent, avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, leſquels diviſés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125.

125. Mais si le dividende & le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espèce qu'eux; ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans le cas où le dividende & le diviseur étant de même espèce, le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent; par exemple, si l'on proposoit cette question, 1243 livres ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende & le diviseur; c'est-à-dire, doit être des livres, & qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sols, & le second reste en deniers; & on trouvera 5 livres 16 sols 8 deniers $\frac{760}{1243}$, pour réponse à la question.

127. Mais lorsque le dividende & le diviseur étant de même espèce, le quotient devra être d'espèce différente; alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende & le diviseur, chacun à la plus petite espèce qui soit dans le dividende, après quoi on fera la division comme dans le cas précédent, & on y traitera les unités du dividende, comme si elles

étoient de même espèce que celles que doit avoir le quotient : par exemple, si l'on proposoit cette question, combien pour 7954 liv. 11 sols 7 deniers, fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 72 livres la toise ? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises & parties de toise. On réduira donc 7954 livres 11 sols 7 deniers tout en deniers, ce qui donnera 1909099; on réduira pareillement 72 livres en deniers, & on aura 17280; on divisera 1909099 considéré comme des toises, par 17280, & on aura pour quotient $110^T\ 2^P\ 10^p\ 6^l\ \frac{19}{20}$.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.

128. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espèce (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite espèce du diviseur pour composer l'unité principale de ce même diviseur ; alors la division sera réduite au cas précédent où le diviseur étoit incomplexe.

EXEMPLE.

$57^T\ 5^P\ 5^p$ d'ouvrage ont été payées $854^{\#}\ 17^f\ 11^d$; on demande à combien cela revient la toise ? Il faut diviser 854 liv. 17 sols 11 den. par $57^T\ 5^P\ 5^p$; & pour cet effet, je réduis les $57^T\ 5^P\ 5^p$, en pouces,

ce qui me donne 4169 pour nouveau diviſeur ; & comme il faut 72p pour faire la toiſe, qui eſt l'unité principale du diviſeur , je multiplie le dividende propoſé 854 livres 17 ſols 11 deniers par 72 (121), ce qui me donne 61552 livres 10 ſols pour nouveau dividende, enſorte que je diviſe comme il ſuit.

61552# 10ſ	4169
19862	14# 15ſ 3d $\frac{1833}{4169}$
3186	
63730ſ	
22040	
1195	
14340d	
1833	

Les 61552 liv. diviſées par 4169 donnent 14 liv. pour quotient & 3186 pour reſte. Ces 3186 livres réduites en ſols, donnent, avec les 10 ſols du dividende, 63730 ſols, qui, diviſés par 4169, donnent 15 ſols pour quotient, & 1195 ſols de reſte. Ces 1195 ſols, réduits en deniers, valent 14340 deniers, leſquels, diviſés par 4169, donnent 3 deniers pour quotient, & 1833 deniers pour reſte; enſorte que le quotient eſt 14 liv. 15 ſols 3 den. $\frac{1833}{4169}$ de denier.

Pour entendre la raiſon de cette règle, il faut faire attention que les 57^{T} 5^{P} 5^{p} valant 4169^{p}, &

le pouce étant la ſoixante-douzième partie de la toiſe, le diviſeur eſt $\frac{4169}{72}$ de la toiſe; or, pour diviſer par une fraction, il faut (109) renverſer la fraction diviſeur, & multiplier enſuite par cette fraction ainſi renverſée; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, & à diviſer enſuite par 4169, ainſi que le preſcrit la règle que nous donnons.

Comme la diviſion par un nombre complexe ſe réduit, ainſi qu'on vient de le voir, à la diviſion par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126) & (127).

Ce ſeroit ici le lieu de parler du toiſé ou de la multiplication & de la diviſion géométriques: ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'expoſer; enſorte qu'il n'y auroit ici autre choſe à ajouter, que d'expliquer quelle eſt la nature des unités des facteurs & du produit; mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, juſqu'à ce que nous ſoyons arrivés à la Géométrie.

De la formation des Nombres quarrés & de l'extraction de leur racine.

129. On appelle *quarré* d'un nombre, le produit

qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même ; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

130. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre qui, multiplié par lui-même, reproduiroit ce même nombre proposé : ainsi 5 est la racine quarrée de 25 ; 7 est la racine quarrée de 49.

131. Un nombre que l'on quarre, est donc tout à la fois multiplicande & multiplicateur ; il est donc deux fois facteur (42) du produit ; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication ; mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine, en nombre entier, est quelqu'un des nombres. . . . .

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Dont les quarrés sont
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainſi la racine quarrée de 72, par exemple, eſt 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 & 81, ſa racine eſt entre les racines de ceux-ci, c'eſt-à-dire, entre 8 & 9; elle eſt 8 & une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut pas aſſigner exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainſi que nous le verrons dans peu.

132. La racine quarrée d'un nombre qui n'eſt point un quarré parfait, s'appelle un nombre *ſourd* ou *irrationnel*, ou *incommenſurable*.

133. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'eſt en obſervant ce qui ſe paſſe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit ſuivre pour revenir à la racine.

Pour quarrer un nombre tel que 54, par exemple:

$$\begin{array}{r} 54 \\ \underline{54} \\ 216 \\ \underline{270} \\ 2916 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions,

comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités.*

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait le *produit des dixaines par les unités.*

Nous passons, après cela, au second chiffre du multiplicateur, & nous multiplions le 4 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités.*

Enfin nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le *quarré des dixaines.*

Nous ajoutons ces produits, & nous avons pour quarré, le nombre 2916, que nous voyons donc être composé *du quarré des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités* du nombre 54.

134. Ce que nous venons d'observer étant une conséquence immédiate des règles de la multiplication, n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dixaines & d'unités; ensorte qu'on peut dire généralement que le quarré de tout nombre composé de dixaines & d'unités, renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer, savoir, le quarré des dixaines de ce nombre,

deux fois le produit des dixaines par les unités, & le quarré des unités.

135. Cela posé, comme le quarré des dixaines est des centaines (puisque 10 fois 10 font 100), il est visible que ce quarré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du quarré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, étant nécessairement des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du quarré total.

136. Donc pour revenir du quarré 2916 à sa racine on peut raisonner ainsi.

EXEMPLE Ier.

2916 | 54 racine.
416
104
———
000

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or la formation du quarré nous apprend qu'il y a, dans 2916, le quarré de ces dixaines, & que ce quarré ne peut faire partie des deux derniers chiffres; il est donc dans 29; & comme la racine quarrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en

que le nombre des dixaines de la racine, eſt 5, & portons-les à côté de 2916, comme on le voit ci-deſſus.

Je quarre 5, & je retranche le produit 25, de 29 ; il me reſte 4 à côté duquel j'abaiſſe les deux autres chiffres 16 du nombre propoſé 2916.

Pour trouver, maintenant, les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reſte 416; il ne contient plus que deux parties dû quarré, ſavoir le double des dixaines de la racine, multipliées par les unités, & le quarré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première ſuffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons; car puiſqu'elle eſt formée du double des dixaines multipliées par les unités, ſi on la diviſe par le double des dixaines que nous connoiſſons, elle doit (74) donner pour quotient les unités : il ne s'agit donc plus que de ſavoir dans quelle partie de 416 eſt renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités; or nous avons remarqué ci-deſſus qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre; il eſt donc dans 41 ; il faut donc diviſer 41, par le double 10 des dixaines trouvées; j'écris donc ſous 41 le double 10 des dixaines, & faiſant la diviſion, le quotient 4 que je trouve eſt le nombre des unités,

que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées ; enſorte que la racine cherchée eſt 54.

Mais il faut obſerver que quoique le quotient 4 que nous venons de trouver, ſoit en effet celui qui convient ; cependant il peut arriver quelquefois que le quotient trouvé de cette manière, ſoit plus fort qu'il ne convient ; parce que 41 (c'eſt-à-dire, la partie qui reſte après la ſéparation du dernier chiffre), renferme non-ſeulement le double des dixaines multiplié par les unités, mais encore les dixaines provenantes du quarré des unités ; c'eſt pourquoi, pour n'avoir aucun doute ſur le chiffre des unités, il faut employer la vérification ſuivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4, des unités, & l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie ſucceſſivement tous les chiffres par le même nombre 4, & je retranche les produits ſucceſſifs, des parties correſpondantes de 416 ; comme il ne reſte rien, j'en conclus que la racine eſt en effet 54.

S'il reſtoit quelque choſe, la racine n'en ſeroit pas moins la vraie racine en nombres entiers, à moins que ce reſte ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité ; mais c'eſt ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enſeigner, eſt fondée ſur la formation même du quarré ; car quand on multiplie 104 par 4, il eſt évident qu'on forme le quarré des unités & le double des dixaines multiplié par les unités ; c'eſt-à-dire, ce qui complette le quarré parfait.

137. De ce que nous venons de dire, il faut conclure que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir ſéparé deux ſur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reſte à gauche ; cette racine ſera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, & on l'écrira à côté du nombre propoſé, en l'en ſéparant par un trait.

On ſouſtraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver ; & après avoir écrit le reſte au-deſſous de cette tranche, on abaiſſera à côté de ce reſte, les deux chiffres qu'on avoit ſéparés.

On ſéparera, par un point, le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaiſſer, & on diviſera ce qui ſe trouvera ſur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-deſſous.

On écrira le quotient, à côté du premier chiffre

de la racine, & on le portera enſuite à côté du double des dixaines qui a ſervi de diviſeur.

Enfin on multipliera par ce même quotient, tous les chiffres qui ſe trouveront ſur cette dernière ligne, & on retranchera leurs produits, à meſure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correſpondent dans la ligne au-deſſus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine quarrée de 7569.

75.69 | 87 racine.
116.9
167
———
000

Je ſépare les deux chiffres 69, & je cherche la racine quarrée de 75; elle eſt 8; j'écris 8 à côté; je quarre 8 & je retranche de 75, le quarré 64; il me reſte 11 que j'écris au-deſſous de 75, & j'abaiſſe à côté de ce même 11, les chiffres 69 que j'avois ſéparés.

Je ſépare, dans 1169, le dernier chiffre 9, pour voir dans 116 la partie que je dois diviſer pour trouver les unités.

Je forme mon diviſeur, en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, & j'écris ce diviſeur au-deſſous de 116; la diviſion me donne pour quotient 7 que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte auſſi ce quotient à côté du diviſeur 16; je multiplie 167 qui forme la dernière ligne, par ce même quotient 7, & je retranche les produits à meſure que je les trouve, de 1169 : il ne reſte rien, ce qui prouve que 7569 eſt un quarré parfait, & le quarré de 87.

138. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviſer par le double des dixaines, que la ſeule partie qui reſte à gauche, après qu'on a ſéparé le dernier chiffre, enſorte que ſi elle ne contenoit pas le double des dixaines, il ne faudroit pas, pour cela, employer le chiffre ſéparé; on mettroit o à la racine. Si au contraire, on trouvoit que le double des dixaines y eſt plus de 9 fois, on ne mettroit cependant pas plus de 9; la raiſon en eſt la même que pour la diviſion (66).

139. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire ſur la racine quarrée des nombres qui n'ont pas plus de quatre chiffres, on ſaiſira facilement ce qu'il convient de faire, lorſque le nombre des chiffres eſt plus grand. De quelque

nombre de chiffres que la racine doive être composée, on peut toujours la concevoir composée de deux parties, dont l'une soit des dixaines, & l'autre des unités; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines & 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer, on peut aussi trouver le troisième par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres, comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, & leur appliquant, pour trouver le troisième, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrième, on considérera les trois premiers comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrième, le même raisonnement qu'on appliquoit aux deux premiers pour trouver le troisième, & ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche; la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce

que, considérant la racine comme composée de dixaines & d'unités, il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (135 & *suiv.*), commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir dans la partie qui reste à gauche, le quarré des dixaines; mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, & ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine quarrée de 76807696.

```
76.80.76.96 | 8764
128.0
 167
-------
 1117.6
  1746
---------
   7009.6
   17524
----------
   00000
```

Après avoir partagé le nombre proposé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine quarrée de la tranche 76 qui est le plus à gauche:

je trouve qu'elle eſt 8, & j'écris 8 à côté du nombre propoſé : je quarre 8 & je retranche le quarré 64, de 76 ; j'ai pour reſte 12 que j'écris au-deſſous de 76; à côté de ce reſte j'abaiſſe la tranche 80 dont je ſépare le dernier chiffre par un point; & au-deſſous de la partie 128, j'écris 16, double de la racine trouvée; puis diſant, en 128 combien de fois 16? je trouve qu'il y eſt 7 fois; j'écris 7 à la ſuite de la racine 8, & à côté du double 16: je multiplie 167 par ce même nombre 7, & je retranche de 1280 le produit de cette multiplication ; il me reſte 111 à côté duquel j'abaiſſe la tranche 76, ce qui forme 11176; je ſépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, & ſous la partie 1117 qui reſte à gauche, j'écris 174, le double de la racine 87 ; je diviſe 1117 par 174, & ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine & à côté du double 174: je multiplie 1746 par ce même nombre 6, & je retranche de 11176, il reſte 700; à côté de ce reſte, j'abaiſſe 96 dont je ſépare le dernier chiffre; au-deſſous de 7009 qui reſte à gauche, j'écris 1752, double de la racine trouvée 876; & diviſant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine & à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, & je retranche de 70096, il ne reſte rien; ainſi la racine quarrée de 76807696 eſt exactement 8764.

140.

140. Lorsque le nombre proposé n'est point un quarré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, & la racine quarrée qu'on a trouvée, est la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé : alors il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée exactement ; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos, c'est-à-dire, de manière que l'erreur qui en résulteroit dans le quarré, soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine ; faire l'opération comme à l'ordinaire, & séparer ensuite par une virgule sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la suite du nombre proposé. En effet (54), le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le quarré (dont les deux facteurs sont égaux) doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs ; c'est-à-dire, le double de ce que doit avoir la racine.

EXEMPLE.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millième près.

Pour faire des millièmes il faut trois décimales ; il faut donc mettre six zéros au quarré 87567 ; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
 49
-----
 346.7
  585
------
  5420.0
   5909
-------
   10190.0
    59181
     427190.0
      591827
-----------
     129111
```

En faisant l'opération comme dans les exemples précédens, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917 ; cette racine est celle de 87567000000 ; mais comme il s'agit de celle de 87567 ou de 87567,000000 ; je sépare moitié autant de décimales dans la racine, que j'ai mis de zéros au quarré ; ce qui me donne 295,917 pour la racine quarrée de 87567, à moins d'un millième près.

Pareillement, si l'on demande la racine quarrée

de 2, à moins d'un dix-millième près, on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142 ; séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura 1,4142 pour la racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millième près.

141. On a vu (106) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur ; par conséquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur & le dénominateur ; ainsi le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

142. Donc réciproquement, pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur ; ainsi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, & celle de 16 est 4.

143. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux ne soient point des quarrés parfaits ; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un quarré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, & ayant tiré la racine du dénominateur, on la

donnera pour dénominateur à la racine du numérateur; ainsi si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2 qu'on trouvera, 1,4, ou 1,41 ou 1,414 ou 1,4142, &c. selon qu'on voudra en approcher plus ou moins; & comme la racine quarrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, &c.

Mais si le dénominateur n'est pas un quarré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, & rendra ce dénominateur quarré, alors on opérera comme dans le cas précédent. Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine quarrée de 15, jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872; & comme la racine quarrée de 25 est 5, la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

144. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$, uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (99).

145. Enfin si l'on avoit des entiers joints à des

fractions, on réduiroit ces entiers en fractions (86), & on opéreroit, comme il vient d'être dit pour une fraction. Ainsi, pour tirer la racine quarrée de $8\frac{3}{7}$, on changeroit $8\frac{3}{7}$, en $\frac{59}{7}$, & celle-ci (143) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

146. On peut aussi réduire en décimales, la fraction qui accompagne l'entier; mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales pair & double de celui qu'on veut avoir à la racine; parce que le produit de la multiplication de deux nombres qui ont des décimales, devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54), le quarré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre. En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (99), dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

147. Si l'on avoit à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale; il faudroit avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas; ce qui se fera en mettant à la suite de ses décimales 1 ou 3 ou 5, &c. zéros; cela n'en change pas la valeur (30). Ainsi, pour tirer la racine quarrée de 21,935 à moins d'un millième près; je tire la racine quarrée de 21,935000 qui est 4,683; c'est

auſſi celle de 21,935. On trouvera de même, que celle de 0,542 eſt à moins d'un millième près 0,736, & que celle de 0,0054 eſt à moins d'un millième près 0,073.

148. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être expoſée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir pluſieurs autres avec plus de facilité & de promptitude, par la diviſion ſeule, en cette manière.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par chercher les trois premiers chiffres de la racine, par la méthode ci-deſſus : je trouve 873 pour cette racine, & 1574 pour reſte : je mets, à côté de ce reſte, les deux chiffres 55, qui ſuivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres ſuivans, ſi j'avois quatre chiffres de la racine, quatre ſi j'en avois 5, & ainſi de ſuite). Je diviſe 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine ; je trouve pour quotient 90 ; ce ſont deux nouveaux chiffres à mettre à la ſuite de la racine, qui par-là devient 87390. Je quarre cette racine, & je retranche ſon quarré 7637012100, de la partie 7637035568 dont 87390 eſt la racine ; il me reſte 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine, comme j'en ai déjà cinq, je puis, par la ſeule diviſion, en trouver 4 ; je mettrai, pour cet effet, à la ſuite du reſte 23468 les deux chiffres reſtans 23 du nombre propoſé & deux zéros, & diviſant 234682300 par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine : mais en partageant le nombre propoſé, en tranches, de la manière qui a été dite ci-deſſus, on voit que ſa racine ne doit avoir que ſix chiffres pour

les nombres entiers, donc cette racine eſt 873901,342, à moins d'un millième près.

On peut, le plus ſouvent, pouſſer chaque diviſion juſqu'à un chiffre de plus, c'eſt-à-dire, juſqu'à autant de chiffres qu'on en a déjà à la racine; mais il y a quelques cas, rares à la vérité, où l'erreur ſur le dernier chiffre, pourroit aller juſqu'à cinq unités; au lieu qu'en ſe bornant à un chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre, même une unité d'erreur ſur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine, par la méthode ordinaire, ce qui reſte après l'opération faite, ſe trouvoit égal au double de ces premiers chiffres, il faudroit, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire, après quoi on trouveroit les autres par la méthode abrégée que nous venons d'expoſer, qui, comme on le voit aſſez, s'applique également aux décimales.

Si la racine devoit avoir des zéros parmi ſes chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéros ſeroient du nombre des chiffres qu'on détermine par la diviſion, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers chiffres du quotient, qu'on ne s'en apperçoive pas, parce que dans la diviſion on ne marque pas les zéros qui doivent précéder ſur la gauche du quotient: le moyen de le diſtinguer eſt de faire attention qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la ſuite du reſte; & par conſéquent, quand il y en aura moins, il en faudra compléter le nombre, par des zéros placés ſur la gauche de ce quotient.

Au reſte, l'abrégé que nous venons d'expoſer, eſt une ſuite de ce principe général, qu'il eſt aiſé de déduire de ce qu'on a vu (134); ſavoir que le quarré d'une quantité

quelconque composée de deux parties, renferme le quarré de la première partie, deux fois la première partie multipliée par la seconde, & le quarré de la seconde.

De la formation des Nombres cubes, & de l'extraction de leur racine.

149. Pour former ce qu'on appelle *le cube* d'un nombre, il faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, & multiplier ensuite, par ce même nombre, le produit résultant de cette première multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre: 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (quarré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisième puissance*, ou *troisième degré* de ce nombre.

150. En général, on dit qu'un nombre est élevé à sa seconde, troisième, quatrième, cinquième, &c. puissance, quand on l'a multiplié par lui-même, 1, 2, 3, 4, &c. fois consécutives, ou lorsqu'il

eſt 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, &c. facteur dans le produit.

151. La racine cubique d'un cube propoſé, eſt le nombre, qui multiplié par ſon quarré, produit ce cube; ainſi 3 eſt la racine cubique de 27.

152. On n'a donc pas beſoin de règles pour former le cube d'un nombre; mais pour revenir du cube à ſa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui ſe paſſe dans la formation du cube.

Obſervons cependant qu'on n'a beſoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorſque le nombre propoſé a moins de quatre chiffres; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-deſſous de 1000, & par conſéquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10, c'eſt-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainſi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci . . . .
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, aura ſa racine cubique, en nombres entiers, entre les deux nombres correſpondans de cette ſuite.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 dont la première contient les cubes.

153. Tout nombre n'a pas de racine cubique;

mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

154. Voyons donc de quelles parties peut être composé le cube d'un nombre qui contiendrait des dixaines & des unités.

Puisque le cube résulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeler ici (134) que *le quarré d'un nombre composé de dixaines & d'unités, renferme*, 1°. *le quarré des dixaines*, 2°. *deux fois le produit des dixaines par les unités*, 3°. *le quarré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties, par les dixaines & par les unités du même nombre.

Afin d'appercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée, la forme suivante.

1°.

Le quarré des dixaines, Deux fois le produit des dixaines par les unités, Le quarré des unités,	étant multiplié par les dixaines, donnera	Le cube des dixaines. Deux fois le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités. Le produit des dixaines par le quarré des unités.

2°.

Le quarré des dixaines,	étant multiplié par les unités, donnera	Le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Deux fois le produit des dixaines par les unités,		Deux fois le produit des dixaines par le quarré des unités.
Le quarré des unités,		Le cube des unités.

Donc en raſſemblant ces 6 réſultats, & réuniſſant ceux qui ſont ſemblables, on voit que le cube d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, contient quatre parties, ſavoir *le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, & enfin le cube des unités.*

Formons, d'après cela, le cube d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, de 43, par exemple.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Nous prendrons donc le cube de 4 qui eſt 64; mais comme ce 4 eſt des dixaines, ſon cube ſera des mille, parce que le cube de 10 eſt 1000; ainſi le cube des 4 dixaines ſera 64000.

3 fois 16, ou 3 fois le quarré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le quarré de 10 eſt 100; ainſi ce produit ſera 14400.

3 fois 4, ou 3 fois les dixaines, étant multipliées par le quarré 9 des unités, donneront des dixaines, & ce produit ſera 1080.

Enfin le cube des unités ſe terminera à la place des unités, & ſera 27.

En réuniſſant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43; cube qu'on auroit, ſans doute, trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, & le produit 1849, encore par 43; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître, par l'examen des parties qui le compoſent, la manière de revenir à ſa racine.

155. Cela poſé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

EXEMPLE.

Soit donc propoſé d'extraire la racine cubique de 79507.

Cube.	*Racine.*
79.5 07	43
15 5.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79; elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, & j'ôte le produit 64 de 79; il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15, j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dixaines trouvées, multipliées par les unités que nous cherchons, plus 3 fois ces mêmes dixaines multipliées par le quarré des unités, plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07; la partie 155 qui reste à gauche, renferme 3 fois le quarré des dixaines multiplié par les unités; c'est pourquoi, afin d'avoir les unités (74), je vais diviser cette partie 155, par le triple du quarré des 4 dixaines, c'est-à-dire, par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155; j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, & connoître le reste, s'il y en a, nous pourrions composer les trois parties du cube qui doivent se trouver dans 15507,

& voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent ; mais il est aussi commode de faire cette vérification, en cubant tout de suite 43, c'est-à-dire, en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849., & multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé a plus de six chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

596.9 47.688 | 842
84 9.47
192
592704

42436.88
21168
5969476 88

000000000

On considérera sa racine comme composée de dixaines & d'unités, & par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en

aura plus d'un, & par conféquent elle aura des dixaines & des unités : il faut donc, pour trouver le cube de ces premières dixaines, féparer les trois chiffres 947.

Cela pofé, je cherche la racine cubique de 596; elle eft 8, j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, & je retranche le produit 512, de 596; il refte 84 que j'écris au-deffous de 596.

A côté de 84, j'abaiffe 947, ce qui me donne 84947, dont je fépare les deux derniers chiffres.

Au-deffous de la partie 849, j'écris 192 qui eft le triple quarré de la racine 8, & je divife 849 par 192; je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, & avoir en même temps le refte, je cube 84, & je retranche le produit 592704, du nombre 596947; j'ai pour refte 4243.

A côté de ce refte j'abaiffe la tranche 688, & confidérant la racine 84 comme un feul nombre qui marque les dixaines de la racine cherchée, je fépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaiffée, & je divife la partie 42436 par le triple quarré de 84, c'eft-à-dire, par 21168; je trouve pour quotient 2 que j'écris à la fuite de 84.

Pour vérifier la racine 842 & avoir le reste, s'il y en a, je cube 842, & je retranche le produit 596947688, du nombre proposé 596947688; & comme il ne reste rien, j'en conclus que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer, 1°. que dans le cours de ces opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort, on s'en appercevroit à ce que la soustraction ne pourroit se faire, & alors on diminueroit la racine successivement d'une, 2, 3, &c. unités, jusqu'à ce que la soustraction devînt possible.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, & il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, & aussi loin qu'on le desire, sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

156. Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine; faire

faire l'extraction comme dans les exemples précédens, & après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, c'est-à-dire, deux décimales, il faut que le cube ou le nombre proposé en ait six (54); il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

```
8.755.000.000 | 2061
---------------------
07.55
12
8000
-----------
 7550.00
 1200
8741816
-----------
  131840.00
  127308
8754552981
-----------
    447019
```

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8; elle est 2 que j'écris à la racine. Je cube 2 & je retranche le produit, de 8; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55 : au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple quarré de la racine, & divisant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient, que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000, que je retranche de 8755; j'ai pour reste 755, à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite; au-dessous de la partie restante 7550, j'écris 1200 triple quarré de la racine 20, & divisant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, & je retranche le produit de 8755000; j'ai pour reste 13184 à côté duquel j'abaisse la dernière tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris 127308, triple quarré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la suite de 206.

le cube 2061, & ayant retranché de 8755000000, le produit 8754552981, j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée de 8755000000, est donc 2061; donc celle de 8755,000000 est 20,61, puisque le cube a trois fois autant de décimales que sa racine (54).

Si l'on vouloit pousser l'approximation plus loin, on mettroit à la suite du reste trois zéros, & on continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a descendu une tranche.

157. Puisque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur; il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur & son dénominateur. Donc réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, & la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, & celle de 64 est 4.

158. Mais si le dénominateur seul est un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, & on donnera à cette racine pour dénominateur, la racine cubique du dénominateur. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$, comme le

numérateur n'eſt pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui ſera 5,22 à moins d'un centième près; & tirant la racine de 343 qui eſt 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$; ou bien en réduiſant en décimales (99), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

159. Si le dénominateur n'eſt pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le quarré de ce dénominateur, & alors le nouveau dénominateur étant un cube, on ſe conduira comme il vient d'être dit. Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$, je multiplie le numérateur & le dénominateur par 49, quarré du dénominateur 7; j'ai $\frac{147}{343}$ qui (88) eſt de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ eſt $\frac{5,27}{7}$, ou en réduiſant purement en décimales, 0,75; la racine cubique de $\frac{3}{7}$ eſt donc 0,75 à moins d'un centième près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertiroit le tout en fraction, & la queſtion ſeroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (157 *& ſuiv.*).

On pourroit auſſi, ſoit qu'il y ait des entiers, ſoit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales; mais il faut avoir ſoin de pouſſer cette réduction juſqu'à trois fois autant de décimales qu'on

veut en avoir à la racine. Ainsi, si l'on demandoit la racine cubique de 7 $\frac{3}{11}$, approchée jusqu'à moins d'un millième, on changeroit la fraction $\frac{3}{11}$ en 0,272727272; ensorte que, pour avoir la racine cubique de 7 $\frac{3}{11}$, on tireroit celle de 7,272727272 qu'on trouvera être 1,937.

160. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéros mis à sa suite, de manière que le nombre de ses décimales soit ou 3 ou 6, ou 9, &c. alors on en tirera la racine comme s'il n'y avoit pas de virgule, & après l'opération faite, on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée; ensorte que si la racine n'avoit pas suffisamment de chiffres pour que cette règle eût son exécution, on y suppléeroit par des zéros placés sur la gauche de cette racine; ainsi pour tirer la racine cubique de 6,54 à moins d'un millième près, je mettrai 7 zéros, & je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1807; j'en séparerai 3 chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, & j'aurai 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que celle de 0,0006 approchée à moins d'un centième près, est 0,08.

161. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique, par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement, par la division, & cela de la manière suivante.

Qu'on demande la racine cubique de 5264627832723456: j'en cherche les quatre premiers chiffres, par la méthode ordinaire; ils sont 1739, & le reste de l'opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 5264627832 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avoit cinq chiffres, & les quatre si elle en avoit six). Je divise 568141372 par 9072363, triple quarré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, & ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739, ensorte que 173962 est, en nombres entiers, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on vouloit pousser plus loin, on cuberoit cette racine, & ayant retranché le produit, du nombre proposé, on mettroit à la suite du reste quatre zéros, & on diviseroit le tout, par le triple du quarré de 173962, ce qui donneroit quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (148) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces divisions on s'aidera de la règle abrégée qui a été donnée (69 & *suiv.*).

Des Raisons, Proportions & Progressions, & de quelques règles qui en dépendent.

162. Les mots *raison* & *rapport* ont la même signification en Mathématiques, & l'un & l'autre

expriment le résultat de la comparaison de deux quantités.

163. Si dans la comparaison de deux quantités, on a pour but de connoître de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport Arithmétique*.

Ainsi, si je compare 15 avec 8 pour connoître leur différence 7, ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point; ensorte que 15.8 marque que l'on considère le rapport arithmétique de 15 à 8.

164. Si dans la comparaison de deux quantités, on se propose de connoître combien l'une contient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport Géométrique*. Par exemple, si je compare 12 à 3 pour savoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre

par deux points : cette expreſſion 12 : 3 marquè que l'on conſidère le rapport géométrique de 12 à 3.

165. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, ſe nomme *antécédent*, & la ſeconde ſe nomme *conſéquent*. Ainſi dans le rapport 12:3, 12 eſt l'antécédent, & 3 eſt le conſéquent : l'un & l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

166. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités, il n'y a donc autre choſe à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

167. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviſer l'une par l'autre.

168. Nous évaluerons ce rapport, dorénavant, en diviſant l'antécédent par le conſéquent : ainſi le rapport de 12 à 3 eſt 4 & le rapport de 3 à 12 eſt $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

169. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ſes deux termes, ou qu'on en retranche une même quantité ; parce que la différence (en quoi conſiſte le rapport), reſte toujours la même.

170. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on diviſe ſes deux

termes par un même nombre : car le rapport géométrique consistant (168) dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, est une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la division de ses deux termes, par un même nombre. Ainsi le rapport 3 : 12 est le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2 ; il est le même que celui de 1 : 4 que l'on a en divisant par 3.

171. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avois à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirois, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin, en supprimant le dénominateur 12 (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), est le même que celui de 81 à 128.

172. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières, est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*, & cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14 forment une proportion arithmétique ; parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières. Pour marquer qu'elles sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi, 7.9 : 12.14, c'est-à-dire, qu'on sépare, par un point, les deux termes de chaque rapport ; & les deux rapports, par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à*, & les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme ;* ensorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit 7 *est à* 9 *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20, forment une proportion géométrique, parce que 3 est contenu dans 15 comme 4 l'est dans 20. Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique, on les écrit ainsi 3 : 15 :: 4 : 20 ; c'est-à-dire, qu'on sépare les deux termes de chaque rapport par deux points, & les deux rapports par quatre points. Les deux points signifient *est à*, & les quatre points signifient *comme ;* de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut seulement observer que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme*, du mot *arithmétiquement.*

173. Le premier & le dernier terme de la

proportion se nomment les *extrêmes*; le 2e & le 3e se nomment les *moyens*.

Comme il y a deux rapports, & par conséquent deux antécédens & deux conséquens, on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent*; & pour le second, *second antécédent*, *second conséquent*.

174. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme proportion *continue*. 3 . 7 : 7 . 11 forment une proportion arithmétique continue; on l'écrit ainsi ÷ 3 . 7 . 11 .; les deux points & la barre qui précèdent, sont pour avertir que dans l'énoncé, on doit répéter le terme moyen qui est, ici, 7.

La proportion 5 : 20 :: 20 : 80 est une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainsi ∺ 5 : 20 : 80; l'usage des quatre points & de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

175. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétiques & géométriques,

1°. Que si dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou si l'on en retranche la différence ou raison qui règne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus

petit ou plus grand que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport, ce qui lui manque pour égaler son voisin; ou retrancher du plus grand, ce dont il surpasse son voisin: ainsi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier & au troisième terme, vous aurez 7 . 7 : 12 : 12, & il est aisé de sentir que cela est général.

2°. Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conséquens, par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent: ainsi dans la proportion 12 : 3 :: 20 : 5, multipliez 3 & 5, chacun par 4, & vous aurez 12 : 12 :: 20 : 20; pareillement, dans la proportion 15 : 9 :: 45 : 27, multipliez 9 & 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez 15 : 15 :: 45 : 45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

176. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques, est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens;* par exemple, dans cette proportion, 3 . 7 : 8 . 12, la somme 3 & 12 des

extrêmes, & celle 7 & 8 des moyens, ſont également 15.

Voici comment on peut s'aſſurer que cette propriété eſt générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entre eux, & les deux derniers égaux auſſi entr'eux, comme dans cette proportion

7 . 7 : 12 . 12

il eſt évident que la ſomme des extrêmes ſeroit égale à celle des moyens.

Or toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (175) en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la ſomme des extrêmes & celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux ſommes; ainſi ſi elles deviennent égales par cette addition, c'eſt qu'elles étoient égales ſans cette même addition. Le raiſonnement eſt le même pour le cas de la ſouſtraction.

177. Puiſque dans la proportion continue les deux termes moyens ſont égaux, il ſuit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen, ou que le terme moyen eſt la moitié de

la ſomme des extrêmes : ainſi pour avoir un moyen arithmétique entre 7 & 15, par exemple ; j'ajoute 7 à 15, & prenant la moitié de la ſomme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, enſorte que ÷ 7 . 11 . 15.

Propriétés des Proportions Géométriques.

178. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, eſt que *le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens ;* par exemple, dans cette proportion 3 : 15 :: 7 : 35, le produit de 35 par 3, & celui de 15 par 7, ſont également 105.

Voici comment on peut ſe convaincre que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conſéquens, comme dans cette proportion,

3 : 3 :: 7 : 7

il eſt évident que le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (175), en multipliant les deux conſéquens par la raiſon. Cette multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes ſera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été, ou ſera un certain nombre de fois plus petit, ſi le

rapport eſt une fraction ; mais elle produira le même effet ſur celui des moyens ; donc, puiſqu'après cette multiplication, le produit des extrêmes feroit égal au produit des moyens, ces deux produits doivent auſſi être égaux ſans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, & réciproquement.

Donc *dans la proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen*, car les deux moyens étant égaux, leur produit eſt le quarré de l'un d'eux. Donc pour avoir un moyen géométrique entre deux nombres propoſés, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, & tirer la racine quarrée de ce produit. Ainſi pour avoir un moyen géométrique entre 4 & 9, je multiplie 4 par 9, & la racine quarrée 6 du produit 36, eſt le moyen proportionnel cherché.

179. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique, il ſuit que ſi connoiſſant les trois premiers termes d'une proportion, on vouloit déterminer le quatrième, il faudroit *multiplier le ſecond par le troiſième, & diviſer le produit par le premier* ; car il eſt évident (74) qu'on auroit le quatrième terme en diviſant le produit des deux extrêmes, par le premier terme ; or ce produit eſt le même

que celui des moyens; donc on aura auſſi le quatrième terme, en diviſant le produit des moyens, par le premier terme.

Ainſi, ſi l'on demande quel ſeroit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers ſeroient 3 : 8 :: 12; je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je diviſe par 3; le quotient 32, eſt le quatrième terme demandé; enſorte que 3, 8, 12, 32, forment une proportion: en effet le premier rapport eſt $\frac{3}{8}$, & le ſecond eſt $\frac{12}{32}$ qui, (89) en diviſant les deux termes par 4, eſt auſſi $\frac{3}{8}$.

Par un ſemblable raiſonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion lorſqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver eſt un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, & diviſer par l'extrême connu: ſi au contraire on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, & diviſer par le terme moyen connu.*

180. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique: en effet, ſi l'on avoit quatre quantités qui ne fuſſent point en proportion géométrique, en multipliant

multipliant les conséquens par le rapport des deux premières, il n'y auroit que le premier antécédent qui deviendroit égal à son conséquent; par exemple, si l'on avoit 3, 12, 5, 10, en multipliant les conséquens 12 & 10 par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 & 12, on auroit 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$ dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus, quand même on n'auroit pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$: il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités sont en proportion.*

De-là nous conclurons cette seconde propriété des proportions.

181. *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens, & les moyens à la place des extrêmes.*

182. La même chose aura lieu, c'est-à-dire, *que la proportion subsistera si l'on échange les places des extrêmes, ou celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il est aisé de voir

que le produit des extrêmes ſera toujours égal à celui des moyens.

Ainſi la proportion 3 : 8 :: 12 : 32, peut fournir toutes les proportions ſuivantes, par la ſeule permutation de ſes termes.

3 : 8 :: 12 : 32
3 : 12 :: 8 : 32
32 : 12 :: 8 : 3
32 : 8 :: 12 : 3
8 : 3 :: 32 : 12
8 : 32 :: 3 : 12
12 : 3 :: 32 : 8
12 : 32 :: 3 : 8

Et il en eſt de même de toute autre proportion.

183. Puiſqu'on peut mettre le troiſième terme à la place du ſecond, & réciproquement, on doit en conclure *qu'on peut, ſans troubler une proportion, multiplier ou diviſer les deux antécédens par un même nombre, & qu'il en eſt de même à l'égard des conſéquens;* car, en faiſant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport ; & les deux conſéquens, le ſecond. Ainſi multiplier les deux antécédens de la première proportion, revient alors, à multiplier les

deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre, ce qui (170) ne change point ce rapport. Par exemple, si j'ai la proportion 3 : 7 :: 12 : 28; je puis, en divisant les deux antécédens, par 3, dire 1 : 7 :: 4 : 28; parce que, de la proportion 3 : 7 :: 12 : 28, on peut (182) conclure 3 : 12 :: 7 : 28; & en divisant les deux termes du premier rapport par 3, 1 : 4 : 7 : 28, qui (182) peut être changée en 1 : 7 :: 4 : 28.

184. *Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent & du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, si l'on a la proportion

12 : 3 :: 32 : 8

on en pourra conclure les proportions suivantes.

	12 *plus* 3	:	3	::	32 *plus* 8	:	8
ou	12 *moins* 3	:	3	::	32 *moins* 8	:	8
ou	12 *plus* 3	:	12	::	32 *plus* 8	:	32
ou	12 *moins* 3	:	12	::	32 *moins* 8	:	32

Car, si c'est au conséquent que l'on compare, il est facile de voir que l'antécédent augmenté ou diminué du conséquent, contiendra ce conséquent, une fois de plus, ou une fois de moins qu'auparavant;

& comme cette comparaiſon ſe fait de la même manière pour le ſecond rapport, qui, par la nature de la proportion, eſt égal au premier, il s'enſuit néceſſairement que les deux nouveaux rapports ſeront auſſi égaux entr'eux.

Si c'eſt à l'antécédent que l'on compare, le même raiſonnement aura encore lieu; en concevant que dans la proportion ſur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport, à la place de ſon conſéquent, & le conſéquent à la place de l'antécédent, ce qui eſt permis (181).

185. Puiſqu'en mettant le troiſième terme d'une proportion à la place du ſecond, & réciproquement, il y a encore proportion (182), on doit conclure que les deux antécédens ſe contiennent l'un l'autre, autant de fois que les conſéquens ſe contiennent auſſi l'un l'autre.

Donc *la ſomme des deux antécédens de toute proportion, contient la ſomme des deux conſéquens, ou eſt contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient ſon conſéquent, ou eſt contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui eſt évident.

Mais, pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second, quatre fois, par exemple, la somme des deux antécédens contiendra le second, cinq fois; & par la même raison, la somme des conséquens, contiendra le second conséquent, 5 fois: donc la somme des antécédens, contiendra celle des conséquens, comme le quintuple d'un des antécédens, contient le quintuple de son conséquent; c'est-à-dire (170), comme un des antécédens, contient son conséquent.

On prouveroit de même, que la différence des antécédens, est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

186. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci; si on a deux rapports égaux, par exemple, celui de.. 4 : 12
& celui de...................... 7 : 21

11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, & conséquent à conséquent.

Donc, *si l'on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens, est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens, est à son conséquent.*

Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6, on peut dire que 4 *plus* 7 *plus* 2, sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, &c.

Car après avoir ajouté, entr'eux, les antécédens des deux premiers rapports, & leurs conséquens aussi entr'eux, le nouveau rapport, qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième; par conséquent on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, & il en résultera encore le même rapport, & ainsi de suite.

187. On appelle *Rapport composé*, celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports dont on multiplie les antécédens entr'eux, & les conséquens entr'eux. Par exemple, si l'on a les deux rapports 12 : 4 & 25 : 5, le produit des antécédens 12 & 25, sera 300; celui des conséquens 4 & 5, sera 20; le rapport de 300 à 20, est ce qu'on appelle rapport composé des rapports de 12 à 4, & de 25 à 5.

188. Ce rapport est le même que si l'on avoit évalué séparément chacun des rapports composans, & qu'on eût multiplié, entr'eux, les nombres qui expriment ces rapports; en effet, le rapport de 12

à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5; or 3 fois 5 font 15, qui est le rapport de 300 à 20; & on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré (168) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, & le conséquent pour dénominateur: ainsi le rapport composé doit être une fraction qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, & pour dénominateur le produit des deux conséquens; c'est donc (106) le produit des deux fractions qui expriment les rapports composans.

189. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si l'on n'a multiplié que deux rapports; *rapport triplé*, si l'on en a multiplié trois; *quadruplé*, si l'on en a multiplié quatre, & ainsi de suite. Par exemple, si l'on multiplie le rapport de 2 à 3, par celui de 4 à 6, qui lui est égal, on aura le rapport composé 8 : 18 qui sera dit rapport *doublé* du rapport de 2 à 3, ou de 4 à 6.

190. *Si l'on a deux proportions, & qu'on les multiplie par ordre; c'est-à-dire, le premier terme de l'une, par le premier terme de l'autre, le second par le second, & ainsi de suite; les quatre produits qui en résulteront seront en proportion.*

Car en multipliant ainſi deux proportions, c'eſt multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (172); donc les deux rapports compoſés qui en réſultent, doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion (172).

191. Concluons de-là que *les quarrés, les cubes, & en général les puiſſances ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion;* puiſque, pour former ces puiſſances, il ne faut que multiplier la proportion, par elle-même, pluſieurs fois de ſuite.

192. *Les racines quarrées, cubiques, & en général les racines ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion;* car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'eſt autre choſe que la racine quarrée du rapport de ces deux termes (142 & 167); & il en eſt de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes; donc, puiſque les deux rapports primitifs ſont ſuppoſés égaux, leurs racines quarrées ſont égales; donc le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, ſera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera, de même, pour les racines cubiques, quatrième, &c.

Uſages des Propoſitions précédentes.

193. Les propoſitions que nous venons de

démontrer, & qu'on appelle les *Règles des proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons, ici, à celles qui appartiennent à l'Arithmétique, & nous commencerons par celle qu'on peut faire de ce qui a été établi (179) & qui est la base de presque toutes les autres.

De la Règle de Trois *directe & simple.*

194. On distingue plusieurs sortes de Règles de *Trois* : elles ont toutes pour objet de faire connoître un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Règle de trois directe & simple*, est nommée *simple*, parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois sont connues, & la quatrième est à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y considère, il y en a toujours deux, qui non-seulement sont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de manière que, de même qu'une des quantités contient l'autre, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la première, contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle; c'est-à-dire, d'une

manière plus abrégée, qu'une quantité & sa relative peuvent toujours être, toutes deux, ou antécédens ou conséquens dans la proportion; ce qui n'a pas lieu dans la règle de Trois inverse, comme nous le verrons dans peu.

La méthode, pour trouver le quatrième terme d'une proportion, & par conséquent pour faire la règle de Trois directe & simple, est suffisamment exposée (179); mais il est à propos de faire connoître, par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette règle.

EXEMPLE Ier.

40 Ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toises d'ouvrage; on demande combien 60 Ouvriers pourroient en faire dans le même temps?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des Ouvriers; ensorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, &c. le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, &c. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché, doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60, relatif au premier, contient le nombre 40 relatif au second: il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci....................

$$40 : 60 :: 268^{T} :$$

Ou, (en divisant ces deux premiers termes par 20), ce qui est permis (170), par ces trois autres.....

2 : 3 :: 268^{T} :

Ainsi, selon ce qui a été dit (179), je multiplie 268^{T}, par 3, & je divise le produit 804, par 2; ce qui donne pour quotient, 402^{T}; & par conséquent 402^{T} pour l'ouvrage que feroient les 60 Ouvriers.

EXEMPLE II.

Un Navire a fait, avec un même vent, 275 lieues en 3 jours; on demande en combien de temps il en feroit 2000, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes?

Il est évident qu'il faut plus de temps, à proportion du nombre de lieues; & que par conséquent, le nombre de jours cherché, doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci..

275 : 2000 :: 3 :

Multipliant 2000 par 3, & divisant le produit 6000 par 275, on aura 21^{jours} $\frac{9}{11}$.

EXEMPLE III.

52^{T} 4^{P} 5^{P} d'ouvrage ont été payées 168^{tt} 9^{f} 4^{d};

on demande combien on doit payer pour 77^T 1^P 8^p?

Le prix de 77^T 1^P 8^p doit contenir le prix 168# 9^f 4^d des 52^T 4^P 5^p, autant que 77^T 1^P 8^p contiennent 52^T 4^P 5^p. Il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci..............................

$52^T\ 4^P\ 5^p : 77^T\ 1^P\ 8^p :: 168^{\#}\ 9^f\ 4^d :$

C'est-à-dire, qu'il faut multiplier 168# 9^f 4^d par 77^T 1^P 8^p, & divifer le produit par 52^T 4^P 5^p, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 & 128).

Mais il fera encore plus fimple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite efpèce, c'eft-à-dire, en pouces; & la queftion fera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres..........

$3797 : 5564 :: 168^{\#}\ 9^f\ 4^d :$

Alors multipliant 168# 9^f 4^d par 5564, on aura 937348# 10^f 8^d; & divifant par 3797, le quotient 246# 17^f 3^d $\frac{2789}{3797}$ fera ce qu'on doit payer pour les 77^T 1^P 8^p.

S'il y avoit des fractions; après avoir réduit les deux termes de même efpèce, à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on fimplifieroit le

rapport de ces deux termes de la manière qui a été enſeignée (171).

De la Règle de Trois *inverſe & ſimple.*

195. La règle de *Trois inverſe & ſimple*, diffère de la règle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que, des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la queſtion pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent ſe contenir l'une l'autre, dans un ordre tout oppoſé à celui des deux autres quantités qui leur ſont relatives; enſorte que, lorſque par l'examen de la queſtion, on a donné, à ces quantités, la diſpoſition convenable pour former une proportion, l'une des quantités principales, & ſa relative, forment les extrêmes; & l'autre quantité principale, avec ſa relative, forment les moyens.

Au reſte, celą n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération; c'eſt toujours le quatrième terme d'une proportion, qu'il s'agit de trouver, ou du moins on peut toujours amener la choſe à ce point.

Quelques Arithméticiens ont preſcrit, pour le cas préſent, une règle aſſujétie à l'énoncé de la queſtion: nous ne ſuivrons point leur exemple; c'eſt la nature de la queſtion, & non pas ſon énoncé

(qui souvent est vicieux), qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE Ier.

30 Hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours; combien faudroit-il d'hommes, pour faire le même ouvrage en 10 jours?

On voit qu'il faut, dans ce second cas, d'autant plus d'hommes, que le nombre de jours est moindre; ainsi le nombre d'hommes cherché, doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.............

$$10^{j} : 25^{j} :: 30^{hom.}$$

C'est-à-dire, de multiplier 30 par 25, & de diviser le produit 750 par 10; ce qui donne 75 ou $75^{hom.}$.

EXEMPLE II.

Un Équipage n'a plus que pour 15 jours de vivres; mais les circonstances doivent lui faire tenir encore la mer pendant 20 jours; on demande à combien on doit réduire la totalité des rations, par jour?

Repréſentons par l'unité, la totalité des vivres que l'on conſomme par jour ; on voit que ce à quoi on doit ſe reſtreindre, doit être d'autant moindre que cette unité, que le nombre 20 des jours, pendant leſquels cette économie doit durer, eſt plus grand que le nombre de 15 jours ; que par conſéquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on auroit conſommés pendant chacun de ces 15 jours, doit contenir celle des vivres que l'on conſommera pendant chacun des 20 jours : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par les trois ſuivans............

$$20^j : 15^j :: 1 :$$

Ce quatrième terme ſera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$; il faut donc ſe réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on auroit conſommé par jour.

De la Règle de Trois *compoſée.*

196. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'expoſer, la quantité cherchée & la quantité de même eſpèce qui entre dans l'énoncé de la queſtion, ont entr'elles un rapport ſimple & déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la queſtion.

Dans la règle de Trois compoſée, le rapport

de la quantité cherchée à la quantité de même eſpèce qui entre dans l'énoncé de la queſtion, n'eſt pas donné par le rapport ſimple de deux autres quantités ſeulement, mais par pluſieurs rapports ſimples qu'il s'agit de compoſer (187) d'après l'examen de la queſtion.

Quand une fois ces rapports ont été compoſés, la règle eſt réduite à une règle de Trois ſimple : les exemples ſuivans vont éclaircir ce que nous diſons.

EXEMPLE Ier.

30 Hommes ont fait 132 toiſes d'ouvrage, en 18 jours; combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-ſeulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un & à l'autre, il faut conſidérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que 18 fois 30 hommes, c'eſt-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant 28 jours, ne font qu'autant que feroient 28 fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La

La question est donc changée en celle-ci : 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même temps? c'est-à-dire, qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$540^{h.} : 1512^{h.} :: 132^{T} :$$

Multipliant 1512 par 132, & divisant le produit, par 540, on trouvera pour réponse à la question, $369^{T}\ 3^{P}\ 7^{p}\ 2^{l}\ \frac{2}{5}$.

EXEMPLE II.

Un homme marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchoit 10 heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vîtesse?

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours, qu'il y a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures, chaque jour, dans le second cas, il lui faudra moins de temps par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe, & à la règle de Trois inverse.

On la réduira à une règle de Trois simple, en

considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre : il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues; combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question; en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme dont il s'agit, emploie dix heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont........

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{h}.$$

On trouvera que ce quatrième terme est 547 heures & $\frac{19}{23}$, lesquelles divisées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours & $\frac{180}{230}$, ou $54^{j}\ \frac{18}{23}$.

De la Règle de Société.

197. La Règle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager, entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet, est fondée sur ce que nous avons établi (186): nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple suivant.

EXEMPLE Ier.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2; l'énoncé de la question fournit ces deux proportions.

4 : 3 :: la première partie, est à la seconde.
4 : 2 :: la première partie, est à la troisième.

Ou (182) ces deux autres................
4 est à la première partie :: 3 est à la seconde.
4 est à la première partie :: 2 est à la troisième.

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux; 4 est à la première partie :: 3 est à la seconde :: 2 est à la troisième.

Or on a vu (186) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; on peut donc dire ici, que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celles que l'on cherche, est à la somme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles, est à la partie de 120 qui lui répond.

La règle ſe réduit donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données ; 2°. à faire autant de règles de Trois, qu'il y a de parties à trouver, & dont chacune aura, pour premier terme, la ſomme des parties proportionnelles données ; pour ſecond terme, le nombre propoſé à diviſer ; & pour troiſième terme, l'une des parties proportionnelles données ; ainſi dans la queſtion que nous avons priſe pour exemple, on auroit ces trois règles de Trois à faire........................

9 : 120 :: 4 :
9 : 120 :: 3 :
9 : 120 :: 2 :

Dont on trouvera (179) que les quatrièmes termes ſont $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ qui ont entr'eux les rapports demandés, & qui compoſent, en effet, le nombre 120.

Mais il eſt aiſé de remarquer qu'il n'eſt pas abſolument néceſſaire de faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut ſe diſpenſer de la dernière, en retranchant du nombre propoſé, la ſomme des autres parties, quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

Trois perſonnes ont à partager le bénéfice de la priſe d'un Vaiſſeau. La première a fait un fonds de

20000#, la seconde de 60000#, la troisième de 120000#; on demande ce qui revient à chacune, sur la prise estimée 800000 liv. tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000#, en parties qui aient, entr'elles, les mêmes rapports que 20000, 60000, 120000, ou (170) que 2, 6, 12, puisque chacun doit avoir proportionnellement à sa mise; il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles 2, 6, 12, & faire les trois proportions suivantes, ou seulement deux.......

20 : 800000 :: 2# : la première partie.

20 : 800000 :: 6# : la seconde partie.

20 : 800000 :: 12# : la troisième partie.

Ces trois parties seront 80000#, 240000#, 480000#.

La question pourroit être plus compliquée, & cependant être ramenée aux mêmes principes, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE III.

Trois personnes ont mis en société; la première 3000#, qui ont été pendant six mois dans la société; la seconde, 4000#, qui y ont été pendant cinq mois; & la troisième, 8000# qui y ont resté pendant neuf mois; combien chacun doit-il avoir sur le bénéfice qui monte à 12050#?

On réduira toutes les mises à un même temps, en cette manière :

La mise de 3000# a dû produire pendant 6 mois, autant que 6 fois 3000 ou 18000#, pendant un mois.

La mise de 4000# a dû produire pendant 5 mois, autant que 5 fois 4000# ou 20000#, pendant un mois.

Enfin la mise 8000# a dû produire en 9 mois, autant que 9 fois 8000# ou 72000#, pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre ; les mises des trois associés sont 18000#, 20000#, 72000# ; combien revient-il à chacun sur le gain 12050#.

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera 1971# 16^s 4^d $\frac{4}{11}$, 2190# 18^s 2^d $\frac{2}{11}$, 7887# 5^s 5^d $\frac{5}{11}$.

Remarque au sujet de la Règle précédente.

198. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les Commençans. Si l'on proposoit cette question, partager 650 en trois parties, dont la première soit à la seconde :: 5 : 4, & dont la première soit à la troisième :: 7 : 3.

On ne peut pas appliquer, ici, la règle précédente, sans une préparation qui consiste à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionnelle de l'une des trois parts cherchées; par exemple, celle de la première; cela s'exécute aisément, en multipliant les deux termes de chaque rapport, par le premier terme de l'autre rapport : ainsi les deux rapports 5 : 4 & 7 : 3, seront ramenés à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes du premier par 7, & les deux termes du second par 5, ce qui n'en change pas la valeur (170), & donne les rapports 35 : 28 & 35 : 15; ensorte que la question se réduit à partager 650, en trois parties qui soient entr'elles comme les nombres 35, 28 & 15; ce qui se fera aisément par la règle précédente.

Si l'on demandoit de partager un nombre en quatre parties, dont la première fût à la seconde :: 5 : 4, la première à la troisième :: 9 : 5, & la première à la quatrième :: 7 : 3; on réduiroit ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux autres; ainsi dans cet exemple on changeroit ces trois rapports, en ces trois autres, 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135; ensorte que la question se réduit à partager le nombre proposé, en quatre parties qui soient

entr'elles, comme les nombres 315, 252, 175 & 135.

De quelques autres Règles dépendantes des Proportions.

* 199. Quoique les règles ſuivantes ſoient d'un uſage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre abſolument : outre qu'elles ne ſont pas ſans utilité par elles-mêmes, elles ſont d'ailleurs propres à faire ſentir les uſages des proportions.

200. La première dont nous parlerons, eſt la règle d'*une fauſſe poſition*. On l'applique ſouvent à réſoudre des queſtions qui appartiennent à la règle de Société dont elle diffère en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles telles qu'elles ſont données par l'énoncé de la queſtion, elle en prend une arbitrairement, & y ſubordonne les autres conformément à la queſtion ; ce qui rend le calcul un peu plus facile.

EXEMPLE I[er].

Partager 640#, entre trois perſonnes, dont la ſeconde ait le quadruple de la première, & la troiſième deux fois & $\frac{1}{3}$, autant que les deux autres enſemble.

Je prends arbitrairement, pour repréſenter la première partie, le nombre 3, dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$.

La première partie étant 3, la ſeconde ſera 12, & la troiſième ſera 35.

La queſtion eſt réduite à partager 640, en trois parties

qui soient entr'elles comme les trois nombres 3, 12 & 35; ce qui se fera comme il a été dit (197).

La règle d'une fausse position sert aussi à résoudre des questions qui sont, en quelque façon, l'inverse de celles de la règle de Société; puisqu'il s'agit de revenir de la somme de quelques parties d'un nombre, à ce nombre même, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ & les $\frac{3}{7}$ fassent 808. Je prends un nombre dont je puisse avoir commodément le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ & les $\frac{3}{7}$ (ce qui est facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre sera 105; j'en prends le $\frac{1}{3}$ qui est 35, le $\frac{1}{5}$ qui est 21, & les $\frac{3}{7}$ qui sont 45; j'ajoute ces trois nombres, & j'ai 101 qui est composé des parties de 105, de la même manière que 808 l'est de celles du nombre en question; donc le nombre en question doit avoir même rapport à 808; que 105 à 101; il doit donc être le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci...........

$$101 : 105 :: 808 :$$

Ce quatrième terme est 840, dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ & les $\frac{3}{7}$.

201. La seconde règle dont nous parlerons, est celle de deux fausses positions.

Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé, mais seulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés; l'exemple suivant fera connoître la règle & son usage.

EXEMPLE III.

Il s'agit de partager 6954[#], entre trois personnes, de

manière que la seconde ait autant que la première, & 54# de plus; & que la troisième ait autant que les deux autres ensemble, & 78# de plus.

Sans les 54 & les 78#, il est clair qu'il ne s'agiroit que de partager le nombre proposé, en parties proportionnelles aux nombres 1, 1 & 2; mais puisqu'il faut prélever sur la somme, 54# pour la seconde personne, & 54# plus 78# pour la troisième; il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé, qu'on doit partager en parties proportionnelles à 1, 1 & 2: comme cette partie qui est facile à trouver dans l'exemple actuel, peut être plus difficile à appercevoir dans d'autres circonstances, on suit la méthode que voici.

Supposons pour la première part, tel nombre que nous voudrons, par exemple, 1#; la seconde part sera 1# plus 54#; c'est-à-dire, 55#; & la troisième sera 1# plus 55# plus 78#; c'est-à-dire, 134#: la totalité de ces parts est 190#.

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 & 2; la première part étant toujours supposée 1#, la seconde seroit 1#, la troisième seroit 2#, & la totalité seroit 4#, dont la différence avec 190#, c'est-à-dire, 186#, est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954#, ce qui la réduit à 6768#; il reste donc à partager 6768# en parties proportionnelles à 1, 1 & 2, selon les règles ci-dessus; & ayant trouvé que la première partie est 1692#, on en conclura que les deux autres parts demandées sont 1746# & 3516#; en effet, la totalité de ces trois parts est 6954#.

202. On trouve encore, chez les Arithméticiens, plusieurs autres règles qui ne sont autre chose que l'application des règles de Trois, à différentes questions, telles que les questions d'*Intérêt*, de *Change*, d'*Escompte*, &c.

Nous n'entrerons pas dans ces détails qui ne peuvent avoir de difficulté pour ceux qui, ayant bien saisi les principes établis ci-dessus, auront en même temps l'état de la question présent à l'esprit. Nous nous bornerons à un seul exemple.

Une personne a fait à un Marchand, un billet de 2854#, payable dans un an; elle vient acquitter son billet au bout de 7 mois, & le Marchand consent de diminuer, pour les 5 mois restans, les intérêts qui ont été compris dans le billet, à raison de 6 pour 100 pour 12 mois; on demande pour quelle somme le Marchand doit rendre ce billet.

Puisque 12 mois produisent 6 pour 100 d'intérêt, 7 mois ont dû produire un intérêt qu'on trouvera en cherchant le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.......

$$12 : 7 :: 6 :$$

Ce quatrième terme sera $\frac{42}{12}$ ou $3\frac{1}{2}$. Or, quand l'intérêt a été pris à 6 pour 100, on a compté pour 106# ce qui ne valoit que 100; donc quand l'intérêt est à $3\frac{1}{2}$, on compte pour $103\frac{1}{2}$, ce qui ne vaut que 100; il faut donc actuellement que ce qui devoit être payé 106, ne soit plus payé que $103\frac{1}{2}$. Ainsi la somme cherchée doit être le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.................

$$106 : 103\tfrac{1}{2} :: 2854\text{\#} :$$

Ce quatrième terme qui est 2786# $13^{f}\, 9^{d}\, \frac{30}{106}$ ou $\frac{15}{53}$, est la somme que le débiteur doit donner pour retirer son billet.

De la Règle d'Alliage.

203. Les questions qui appartiennent à cette règle, sont de deux sortes.

Dans l'une il s'agit de trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses, dont le nombre & la valeur particulière de chacune, sont connus.

Dans la feconde, il s'agit de connoître les quantités de chaque efpèce de chofes qui entrent dans un ou plufieurs mêlanges, lorfqu'on connoît le prix ou la valeur de chaque efpèce, & le prix ou la valeur totale de chaque mêlange.

Nous réfervons les queftions de la feconde forte pour l'Algèbre.

Quant aux queftions de la première, voici la règle pour les réfoudre.

Multipliez la valeur de chaque efpèce de chofes, par le nombre des chofes de cette efpèce, ajoutez tous les produits, & divifez la fomme par le nombre total des chofes de toutes les efpèces.

EXEMPLE.

On emploie 200 Ouvriers, dont 50 font payés à raifon de 40 fols par jour, 70 à raifon de 30 fols, 50 à raifon de 25 fols, & 30 à raifon de 20 fols, à combien chaque Ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre?

50 Ouvriers à 40 fols par jour font une dépenfe

de.	2000f
70 à 30f.	2100
50 à 25	1250
30 à 20	600
	5950f

La dépenſe des 200 Ouvriers eſt donc de 5950^{f} par jour, & par conſéquent (en diviſant par 200), chaque Ouvrier revient, l'un portant l'autre, à 29^{f} 9^{d} par jour. Les autres queſtions de cette eſpèce ſont ſi faciles à réſoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propos de ne pas inſiſter ſur cette matière.

Des Progreſſions Arithmétiques.

204. La progreſſion arithmétique eſt une ſuite de termes dont chacun ſurpaſſe celui qui le précède, ou en eſt ſurpaſſé, de la même quantité.

Par exemple, cette ſuite....................
÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, &c. eſt une progreſſion arithmétique, parce que chaque terme y ſurpaſſe celui qui le précède, d'une même quantité qui eſt ici 3.

Les deux points ſéparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la progreſſion, ſont deſtinés à marquer qu'en énonçant cette progreſſion, on doit répéter chaque terme, excepté le premier & le dernier, en cette manière, 1 *eſt à* 4 *comme* 4 *eſt à* 7, *comme* 7 *eſt à* 10, &c.

La progreſſion eſt dite *croiſſante* ou *décroiſſante*, ſelon que les termes vont en augmentant ou en

diminuant; mais comme les propriétés de l'une & de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, ou *ajouter* en *soustraire*, nous la considèrerons ici uniquement comme croissante.

205. On voit donc, d'après la définition de la progression arithmétique, qu'avec le premier terme & la différence commune, ou la raison de la progression, on peut former tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison; & que par conséquent:

Le second terme est composé du premier, plus la raison.

Le troisième composé du second, plus la raison, & par conséquent du premier, plus deux fois la raison.

Le quatrième est composé du troisième, plus la raison; & par conséquent, du premier, plus trois fois la raison; & ainsi de suite.

206. De sorte qu'on peut dire, en général, qu'*un terme quelconque d'une progression arithmétique, est composé du premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

207. Donc si le premier terme étoit zéro, tout

autre terme de la progreſſion feroit égal à autant de fois la raiſon, qu'il y auroit de termes avant lui.

208. Ce principe peut avoir les deux applications ſuivantes :

1°. Il ſert à trouver un terme quelconque d'une progreſſion, ſans qu'on ſoit obligé de calculer ceux qui le précèdent : qu'on demande, par exemple, quel feroit le 100ᵉ terme de cette progreſſion...

÷ 4 : 9 : 14 : 19 : 24, &c.

Puiſque ce terme cherché doit être le centième, il a donc 99 termes avant lui ; il eſt donc compoſé du premier terme 4, & de 99 fois la raiſon 5 ; il eſt donc 4 plus 495, c'eſt-à-dire, 499.

209. 2°. Ce même principe ſert à lier deux nombres quelconques, par une ſuite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progreſſion arithmétique ; ce qu'on appelle *inſérer* entre deux nombres donnés, pluſieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou ſimplement pluſieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 & 7, par cinq nombres qui faſſent une progreſſion arithmétique avec 1 & 7 ; ces nombres ſont 2, 3, 4, 5, 6 ; mais comme il n'eſt pas toujours aiſé de voir, du premier coup d'œil, quels doivent être ces nombres,

voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit règner dans cette progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés, devant être le dernier terme de la progression, doit être composé du premier, c'est-à-dire, du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui; donc si du plus grand de ces deux nombres, on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'est-à-dire, qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précèdent le plus grand; donc (74) si l'on divise ce reste, par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les deux; donc, *pour insérer, entre deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand; & diviser le reste, par le nombre des moyens augmenté d'une unité.* Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la progression.

Par

Par exemple, si entre 4 & 11, on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques; je retranche 4 de 11, il me reste 7 que je divise par 9, nombre de moyens augmenté de l'unité; le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la progression qui sera par conséquent.........................

$\div 4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9\frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11.$

Pareillement, si l'on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 & 1, retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudroit diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité; ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0, 1 pour la raison. Et par conséquent la progression sera..

$\div$ 0 . 0, 1 . 0, 2 . 0, 3 . 0, 4 . 0, 5 . 0, 6 . 0, 7 . 0, 8 . 0, 9 . 1.

210. On voit par-là, qu'entre deux nombres, si voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions arithmétiques, que nous ne traitons ici que par rapport aux logarithmes dont nous parlerons plus bas; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

211. La progression géométrique est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède,

ou eſt contenu en lui, le même nombre de fois. Par exemple cette ſuite......................

$\div\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192

eſt une progreſſion géométrique ; parce que chaque terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui eſt ici 2.

Ce nombre de fois eſt ce qu'on appelle *la raiſon* de la progreſſion.

Les quatre points qui précèdent la progreſſion, ont la même ſignification que les deux points qui précèdent la progreſſion arithmétique (204). Mais on en met quatre pour avertir que la progreſſion eſt géométrique.

La progreſſion eſt dite *croiſſante* ou *décroiſſante*, ſelon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous conſidérerons toujours la progreſſion géométrique, comme croiſſante, parce que les propriétés ſont les mêmes dans l'une & dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviſer*, & celui de *contenir* en ceux de *être contenu*.

Puiſque le ſecond terme contient le premier, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc composé du premier multiplié par la raiſon.

Puiſque le troiſième terme contient le ſecond,

autant de fois qu'il y a d'unités dans la raifon, il eft donc compofé du fecond multiplié par la raifon, & par conféquent du premier multiplié par la raifon, & encore multiplié par la raifon; c'eft-à-dire, du premier multiplié par le quarré, ou la feconde puiffance de la raifon.

Puifque le quatrième terme contient le troifième, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raifon, il eft donc compofé du troifième multiplié par la raifon, & par conféquent du premier multiplié par le quarré de la raifon, & encore multiplié par la raifon; c'eft-à-dire, multiplié par le cube, ou la troifième puiffance de la raifon.

Par exemple, dans *la progreffion ci-deffus;* 6 eft compofé du premier terme 3 multiplié par la raifon 2; 12 eft compofé du premier terme 3 multiplié par le quarré 4 de la raifon 2; 24 eft compofé du premier terme 3 multiplié par le cube 8 de la raifon 2.

212. En continuant le même raifonnement, on voit qu'*un terme quelconque de la progreffion géométrique, eft compofé du premier multiplié par la raifon élevée à une puiffance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.*

Donc, fi le premier terme de la progreffion eft

l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précédent; car la multiplication par le premier terme qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée; à la septième, par exemple, il faut, suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, multiplier ce nombre par lui-même, six fois consécutives; ainsi pour élever 2 à la septième puissance, je dirois 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, qui feroit la septième puissance de 2; mais on peut abréger l'opération en diverses manières; par exemple, je puis d'abord quarrer 2, ce qui fait 4, cuber ce 4, ce qui donne 64, & le multiplier par 2, ce qui fait 128; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8, quarrer 8, ce qui donne 64, & multiplier 64 par 2, ce qui donne 128; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

213. Le principe que nous venons de poser (212) sur la formation d'un terme quelconque de la progression, & la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra

de la progreſſion, ſans être obligé de calculer ceux qui le précèdent : ſi l'on demande, par exemple, quel ſeroit le douzième terme de la progreſſion

÷ 3 : 6 : 12 : 24, &c.

Comme je ſais (212) que ce douzième terme doit être compoſé du premier, multiplié par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce douzième, je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzième puiſſance de la raiſon 2; pour former cette onzième puiſſance, je cube 2, ce qui me donne 8; je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvième puiſſance, & enfin je multiplie 512, neuvième puiſſance de la raiſon, par 4, ſeconde puiſſance, & j'ai 2048 pour la onzième puiſſance de 2; je multiplie donc 2048 par 3, & j'ai 6144 pour le douzième terme de la progreſſion.

214. Une autre application qu'on peut faire, du même principe; c'eſt pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra, entre deux nombres donnés. Si l'on demandoit trois moyens géométriques entre 4 & 64; avec un peu d'attention, on voit que ces trois moyens géométriques ſont 8, 16, 32; en effet ÷ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 forment une progreſſion géométrique; mais ſi l'on propoſoit d'autres nombres que 4 & 64,

ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouveroit pas aussi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la progression; parce que, quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes, par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 & 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une progression géométrique qui commence par 2, & qui doit avoir neuf termes entre le premier & le dernier. 2048 est donc composé du premier terme 2 multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (69), si l'on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre de termes qui doivent précéder 2048; donc, en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison : or cette puissance doit être la dixième, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 & 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048 : donc il faut

extraire la racine dixième du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048 divisé par le plus petit 2.

215. Comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour insérer entre deux nombres donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra; il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainsi, pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2, ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième (*); elle est 2; donc la raison est 2 : ainsi pour former les moyens en question, je multiplie le premier terme 2 continuellement par la raison 2; & après avoir formé neuf moyens,

(*) Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre; mais il en est de celle-ci comme de la racine quarrée & de la racine cubique : la racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de 2; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine dixième n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de dix; il en est de même pour les autres racines; la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de trente chiffres; cela se démontre, comme on l'a fait pour la racine quarrée & la racine cubique.

je retombe ſur 2048, comme on le voit ici.....
÷÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, ſi l'on demandoit de trouver quatre moyens géométriques entre 6 & 48, je diviſerois 48 par 6, & du quotient 8 je tirerois la racine cinquième; comme 8 n'a pas de racine cinquième exacte, on ne peut jamais aſſigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 & 48; mais on peut approcher de cette racine, ſi près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée & de la racine cubique, & que nous ferons connoître dans l'Algèbre. En attendant, il ſuffit qu'on conçoive qu'il eſt poſſible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois de ſuite par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8; & qu'il en eſt de même pour tout autre nombre & pour toute autre racine; & de-là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, ſoit exactement, ſoit par une approximation pouſſée à tel degré qu'on voudra, & c'eſt tout ce qu'il nous faut pour paſſer aux logarithmes.

Des Logarithmes.

216. Les *logarithmes* ſont des nombres en pro-

greſſion arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille ſuite de nombres en progreſſion géométrique. Si l'on a, par exemple, la progreſſion géométrique & la progreſſion arithmétique ſuivantes.................................

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, &c.
÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . &c.

Chaque terme de la ſuite inférieure, eſt dit le logarithme du terme qui eſt à pareille place dans la ſuite ſupérieure.

217. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puiſqu'à la même progreſſion géométrique on peut faire correſpondre une infinité de progreſſions arithmétiques différentes. Comme nous ne conſidérons ici les logarithmes, que par rapport à l'uſage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à conſidérer les différentes progreſſions géométriques & arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles; nous paſſons tout de ſuite à celles qu'on a conſidérées dans la formation des Tables de logarithmes.

218. On a choiſi pour progreſſion géométrique, la progreſſion décuple, & pour progreſſion arithmétique, la ſuite naturelle des nombres; c'eſt-à-

dire, qu'on a choisi les deux progressions suivantes.....................................

$\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000
$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

219. Ainsi il sera toujours aisé de reconnoître quel est le logarithme de l'unité suivie de tant de zéros qu'on voudra; il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la suite de cette unité.

Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la progression décuple; elle dépend de principes que nous ne pouvons expofer ici; mais nous allons expliquer leur formation par une voie, qui, à la vérité, ne feroit pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes, mais qui suffit, tant pour concevoir cette formation, que pour rendre raison des usages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

220. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puisse faire partie de la progression géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voye pas que 3 puisse faire partie de la progression géométrique $\div\!\div$ 1 : 10 : 100, &c. cependant on voit que si, entre 1 & 10, on in-

ſéroit un très-grand nombre de moyens géométriques (214) ; comme on monteroit alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus ſerrés que le nombre de ces moyens ſeroit plus grand, il arriveroit de deux choſes l'une, ou que quelqu'un de ces moyens ſe trouveroit être préciſément le nombre 3, ou que du moins, il s'en trouveroit deux conſécutifs, entre leſquels le nombre 3 ſeroit compris, & dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens inſérés ſeroit plus grand.

Cela poſé, ſi l'on inſéroit pareillement entre 0 & 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inſéré de moyens géométriques entre 1 & 10, chaque terme de la progreſſion géométrique ayant pour logarithme, le terme correſpondant de la progreſſion arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 ſe trouve dans la progreſſion géométrique; ou ſi 3 n'étoit pas exactement quelcun des termes de celle-ci, on prendroit dans la progreſſion arithmétique, le terme qui répondroit à celui de la progreſſion géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'eſt ainſi qu'on pourroit s'y prendre en effet, ſi l'on n'avoit pas de moyens plus expéditifs; quoi qu'il en ſoit, c'eſt à cela que revient le calcul des logarithmes.

221. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 & 10, pareil nombre entre 10 & 100, pareil nombre entre 100 & 1000, &c. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 & 1, pareil nombre entre 1 & 2; pareil nombre entre 2 & 3; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, & tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la première, le nombre le plus approchant de 2, & on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant; qu'on a cherché de même dans la première, le nombre le plus approchant de 3, & qu'on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant; qu'on en a fait de même, successivement, pour les nombres 4, 5, 6, &c. qu'enfin ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5; &c. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la progression arithmétique, qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoient le plus; alors on aura l'idée de la formation dès logarithmes, & de leur disposition dans les Tables ordinaires.

Table des Logarithmes des Nombres naturels depuis 1 jusqu'à 200.

Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.
0	infini nég.	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0,845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0,954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.	Nombres.	Logarithmes.
120	,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

Les logarithmes renfermés dans cette Table, n'ont que six chiffres après la virgule ; ils en ont sept dans les Tables ordinaires, mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-après.

222. Remarquons au sujet de cette Table, que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, s'appelle la *Caractéristique*, parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade est compris

le nombre auquel appartient ce logarithme ; par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, & que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme, que 3 & une fraction ; il a donc 3 pour caractéristique, & les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

223. Comme il ne s'agit ici que des logarithmes tels qu'ils sont dans les Tables ordinaires, les propriétés que nous allons exposer, ne regardent que les progressions géométriques qui ont l'unité pour premier terme, & les progressions arithmétiques qui ont zéro pour premier terme.

Comparons donc encore, terme à terme, une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une progression arithmétique aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux progressions suivantes.................................

∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, &c.
÷ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, &c.

Il suit de la nature & de la correspondance parfaite de ces deux progressions, qu'autant de fois la

raiſon de la première eſt facteur dans l'un quelconque des termes de cette progreſſion, autant de fois la raiſon de la ſeconde eſt contenue dans le terme correſpondant de cette ſeconde; par exemple, dans le terme 2187, la raiſon 3 eſt ſept fois facteur, & dans le terme 28, la raiſon 4 eſt contenue ſept fois.

En effet, ſelon ce qui a été dit (206 & 212) la raiſon eſt facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là; & dans la ſeconde, un terme quelconque eſt compoſé d'autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui. Or il y a le même nombre de termes de part & d'autre.

Concluons de-là, qu'un terme quelconque de la progreſſion géométrique, aura toujours pour correſpondant dans la progreſſion arithmétique, un terme qui contiendra la raiſon de celle-ci, autant de fois que la raiſon de l'autre eſt facteur dans le premier.

224. Donc, *ſi l'on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la progreſſion géométrique, & ſi l'on ajoute en même temps les deux termes correſpondans de la progreſſion arithmétique, le produit & la ſomme ſeront deux termes qui ſe correſpondront dans ces progreſſions.*

Car il eſt évident que la raiſon ſera facteur dans le produit, autant qu'elle l'eſt, tant dans l'un des

termes

termes multipliés, que dans l'autre; & que la raiſon de la progreſſion arithmétique ſera contenue dans la ſomme, autant qu'elle l'eſt, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre.

225. Donc on peut, par l'addition ſeule de deux termes de la progreſſion arithmétique, connoître le produit des deux termes correſpondans de la progreſſion géométrique, en ſuppoſant ces deux progreſſions prolongées ſuffiſamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 & 24 qui répondent à 9 & 729, j'ai 32 qui répond à 6561; d'où je conclus que le produit de 729 par 9, eſt 6561, ce qui eſt en effet.

226. Donc, puiſque les nombres naturels qui compoſent la première colonne de la Table ci-deſſus, ont été tirés d'une progreſſion géométrique qui commence par l'unité; & puiſque leurs logarithmes ſont les termes correſpondans d'une progreſſion arithmétique qui commence par zéro; il faut en conclure, qu'*en ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De-là il eſt aiſé de conclure les uſages ſuivans.

Uſage des Logarithmes.

227. *Pour faire une multiplication par logarithmes; il faut ajouter le logarithme du multiplicande, au loga-*

rithme du multiplicateur ; la somme sera le logarithme du produit ; c'est pourquoi cherchant cette somme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté; par exemple, si l'on propose de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite Table ci-dessus, que le logarithme de 14 est............. 1,146128
& que celui de 13 est............. 1,113943

La somme.................... 2,260071
Répond dans la même Table au nombre 182 qui est en effet le produit.

228. Pour quarrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme ; puisqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

229. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler son logarithme ; & en général, pour élever un nombre à une puissance quelcónque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance ; c'est-à-dire, multiplier son logarithme, par le nombre qui marque cette puissance; par exemple, pour élever un nombre à la septième puissance, il faudra multiplier par 7, le logarithme de ce nombre.

230. Donc réciproquement, pour extraire la

racine quarrée, cubique, quatrième, &c. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre, par 2, 3, 4, &c.; c'est-à-dire, en général, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé, dans la table, que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181; il répond à 12, qui est par conséquent la racine quarrée de 144.

Si l'on demande la racine septième de 128, je cherche, dans la Table, son logarithme que je trouve être 2,107210; j'en prends le septième, ou je le divise par 7, & je cherche à quoi répond dans la Table, le quotient 0,301030, il répond à 2 qui est en effet la racine septième de 128.

231. *Pour trouver le quotient de la division d'un nombre, par un autre; il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende; chercher dans la Table à quel nombre répond le logarithme restant, ce nombre sera le quotient.*

Par exemple, si l'on veut diviser 187 par 17, je

cherche, dans la Table, les logarithmes de ces deux nombres, & je trouve..................

le logarithme de 187..........	2,271842
celui de.........17..........	1,230449
La différence..................	1,041393

Répond, dans la Table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvoit pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouveroit qu'en partie dans la Table ; mais nous allons enseigner, ci-après, ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (74), le logarithme du quotient, ajouté (227) au logarithme du diviseur, doit donc composer le logarithme du dividende ; & par conséquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviseur.

232. D'après ce que nous venons de dire, il est très-facile de voir que pour faire une règle de Trois par logarithmes ; il faut ajouter le logarithme du second terme, au logarithme du troisième ; & de la somme, retrancher le logarithme du premier.

233. Remarquons que lorsqu'on cherche dans les Tables ordinaires, un logarithme résultant de quelques

opérations sur d'autres logarithmes ; si l'on ne trouve de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme, & celui de la Table, que sur le dernier chiffre seulement, on doit regarder cette différence comme nulle ; parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septième ordre près.

Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

234. Les fractions & les nombres entiers joints à des fractions n'ont pas leurs logarithmes dans les Tables ; il en est de même des racines quarrées, cubiques, &c. des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction (86), & ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur. Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91 ; le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (96).

235. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur; le reste, qui marquera ce dont il s'en faut que la soustraction n'ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entièrement faite. Ce signe est celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ seroit — 0,917648 (*).

236. Ce signe est destiné à rappeler dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés, selon une règle toute opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'est-à-dire, que si l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de

(*) Les nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous les ferons connoître plus particulièrement dans l'Algèbre : en attendant, nous prévenons que c'est en prendre une idée fausse, que de les regarder comme des nombres au-dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

cette fraction; si au contraire l'on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, & à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, & retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur : or, cet excès est précisément le logarithme de la fraction. A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir; en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$; c'est-à-dire (234), la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée, au logarithme de son numérateur.

237. Il peut arriver, & il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier & la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des Tables; par exemple, si l'on demande le logarithme de $53 \frac{821}{1704}$, ce nombre réduit

en fraction, revient à $\frac{303133}{5704}$, dont le numérateur passe les limites des Tables les plus étendues.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'est pas rigoureuse; mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires. Avant que de l'exposer, observons :

238. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, &c. unités, à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, &c. puisque c'est ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, &c. (219 & 227).

2°. Au contraire, si l'on retranche 1, 2, 3, &c. unités, de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, &c.

239. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le reste puisse se trouver dans les Tables (*).

(*) Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires de logarithmes qui aillent jusqu'à 20000, ou au moins jusqu'à 10000. Celles de M. Rivard & celles de feu M. l'Abbé de la Caille sont exactes & commodes.

Ici, par exemple, j'en séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui (28) est 100 fois plus petit que le nombre proposé 357859.

Je cherche dans les Tables, le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403; je prends en même-temps à côté de ce logarithme (*), la différence 1214, entre ce même logarithme & celui de 3579, après quoi je fais cette règle de Trois. Si pour 1 unité de différence entre les deux nombres 3579 & 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes;

Combien pour 0,59 différence entre les deux nombres 3578,59 & 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes? c'est-à-dire, que je cherche le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont........

1 : 1214 :: 0,59 :

Ce quatrième terme est 716,26, ou simplement 716, en négligeant les décimales; j'ajoute donc 716 au logarithme 3,5536403 de 3578, & j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578,59; il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver; & on aura 5,5537119 pour le logarithme

(*) Ces différences se trouvent dans les Tables, à côté des logarithmes mêmes.

cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite, étoient tous des zéros; après avoir trouvé, dans les Tables, le logarithme de la partie qui reste à gauche; il n'y auroit autre chose à faire qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique, qu'on auroit séparé de zéros.

240. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avoit point de virgule; & après l'avoir trouvé, soit immédiatement dans les Tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (239), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce qu'ayant considéré le nombre, comme s'il n'avoit point de virgule; c'est-à-dire, comme 10, ou 100, ou 1000, &c. fois plus grand qu'il n'est, on doit le rappeler à sa valeur par une diminution convenable sur la caractéristique de son logarithme (238).

241. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre proposé; on cherchera encore ce nombre, dans les Tables, comme s'il n'avoit pas de virgule; & ayant pris le logarithme correspondant, on le

retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre, & on fera précéder le reste du signe —; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3 qui est 0,477121; je le retranche de deux unités, & appliquant au reste le signe —, j'ai — 1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'est autre chose que $\frac{3}{100}$; or pour avoir le logarithme de $\frac{3}{100}$, il faut (235) retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, & appliquer au reste, le signe —.

Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables.

242. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier; or si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les Tables, le logarithme restant, que quand le quotient sera un nombre entier; il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

243. Proposons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excède les limites des Tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des Tables.

On retranchera de la caractéristique, autant d'unités

qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les Tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les Tables, le nombre cherché, sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les Tables, mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique (238).

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve (après avoir ôté trois unités à la caractéristique), répondre au nombre 16879; j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467, répond à 16879000.

Si l'on ne trouve, dans les Tables, que les premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à sa caractéristique; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 & 1751; le nombre auquel il répond est donc 1750 & une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme 3,2432768, le logarithme de 1750, & j'ai pour différence 2388.

Je prends aussi dans les Tables, la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 & 1750, après quoi je fais cette règle de Trois.

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 & 1750,

Répondent à 1 unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2388 entre mon logarithme & celui de 1750?

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2388}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre 1750 $\frac{2388}{2481}$, à très-peu de chose près; par conséquent, le logarithme proposé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand (238), a pour nombre correspondant 175000 $\frac{238800}{2481}$, c'est-à-dire, 175096 $\frac{624}{2481}$, ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175096,25.

244. Si le logarithme proposé tomboit entre ceux des Tables, il n'y auroit aucune unité à retrancher à la caractéristique, & par conséquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même manière.

245. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode, n'est pas rigoureusement exacte (*), & qu'elle n'approche de la vérité,

(*) Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, & cela suffit pour les usages ordinaires.

qu'autant que les nombres cherchés sont grands; si le logarithme proposé tomboit au-dessous de celui de 1500, il faudroit, pour plus d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourroit le faire sans passer les bornes des Tables; & ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans les Tables, on en sépareroit sur la droite, autant de chiffres par une virgule, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (243), & réduisant le quatrième terme en décimales, on mettra celle-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 & de 4, & que le nombre auquel il appartient, est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique; c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 & 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millième près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme & celui de 3493, c'est-à-dire, 739; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 & 3493, & je chercherai, en

raisonnant comme ci-dessus (243), le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci..................................

1243 : 1 :: 739 :

Ce quatrième terme, évalué en décimales, est 0,594; donc le nombre cherché est 3,493594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce que les logarithmes des Tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance, jusqu'à trois décimales : au surplus il est rare qu'on ait besoin d'aller jusques-là. La remarque que nous faisons, doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (239 & 243) de la même proportion.

246. Si l'on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, &c. unités, selon l'étendue des Tables; & après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme restant, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont on aura retranché le logarithme.

Par exemple, si l'on demande à quelle fraction appartient — 1,532732, je retranche 1,532732

de 4, & il me reſte 2,467268, qui dans les Tables ſe trouve entre les logarithmes de 293 & de 294; j'en conclus que la fraction cherchée eſt entre 0,0293, & 0,0294; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4, le logarithme propoſé 1,532732, c'eſt (236) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme propoſé, ou (ce qui eſt la même choſe) c'eſt multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve eſt 10000 fois trop grand; il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire, trouvera abondamment des applications par la ſuite. Bornons-nous, quant à préſent, à donner une idée, par quelques exemples, des avantages que les logarithmes procurent pour la facilité & la promptitude des calculs.

EXEMPLE Ier.

On demande le quotient de 17954 diviſé par 12836, approché juſqu'à moins d'un dix-millième près.

Logarithme de 17954.........	4,254161
Logarithme de 12836.........	4,108430
Reſte...............	0,145731

Ce

Ce reste, cherché dans les Tables, avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc (238) le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

Le logarithme de 53 est.......... 1,724276
Son tiers (230) est............. 0,574759

Ce dernier, cherché dans les Tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 3756; donc (238) la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (156). Il ne faut pas, pour cela, regarder cette dernière comme inutile; car elle s'étend à une infinité de nombres auxquels les logarithmes n'atteindroient pas, par rapport aux bornes des Tables.

EXEMPLE III.

Veut-on avoir, à moins d'un centième près, la racine cinquième du cube de 5736?

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736; & on aura 11,275827, pour logarithme du cube

de 5736. Prenant le cinquième de ce dernier logarithme, on a 2,255165, pour logarithme de la racine cinquième du cube de 5736. Ce logarithme, cherché dans les Tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centièmes, répond entre les nombres 17995 & 17996; la racine cherchée est donc 179,95 à moins d'un centième près.

EXEMPLE IV.

Qu'il soit question de trouver quatre moyens proportionnels géométriques, entre $2\frac{2}{3}$, & $5\frac{3}{4}$?

Il faudroit (215) pour avoir la raison qui doit régner dans la progression, diviser $5\frac{3}{4}$, par $2\frac{2}{3}$, & extraire la racine cinquième du quotient.

Par logarithmes, cette opération est très-simple. Je détermine par les Tables, le logarithme de $5\frac{3}{4}$, ou $\frac{23}{4}$; c'est 0,759668. Je détermine pareillement le logarithme de $2\frac{2}{3}$; c'est 0,425969. Je retranche donc (231) ce logarithme, du premier; & j'ai 0,333699; prenant donc (230) le cinquième de ce dernier, j'ai 0,066740 pour le logarithme de la raison cherchée. Ce logarithme, cherché dans les Tables, avec une caractéristique plus forte de 4 unités, pour avoir 4 décimales, répond à 11661 à moins d'une unité près; donc la raison est 1,1661, à moins d'un dix-millième près. Il ne s'agit donc

plus, pour avoir les moyens proportionnels, que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$, par 1,1661; puis le produit, par 1,1661 & ainsi de suite.

Mais ces opérations peuvent être faites beaucoup plus promptement, à l'aide des logarithmes, en ajoutant consécutivement au logarithme 0,425969 du premier terme $2\frac{2}{3}$, le logarithme 0,066740 de la raison, son double, son triple, & son quadruple; ensorte qu'on aura 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929 pour les logarithmes des quatre moyens proportionnels demandés. Et si l'on cherche ces logarithmes dans les Tables, avec trois unités de plus à la caractéristique, on trouve que ces quatre moyens proportionnels sont 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

REMARQUE.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns que l'on doit retrancher, on peut simplifier l'opération, par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier, l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 & chacun des chiffres du nombre proposé, à l'exception du

dernier, pour lequel on écrit la différence entre 10 & ce chiffre. Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000; je retranche successivement, les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9; & le dernier chiffre, je le retranche de 10, & j'ai 473073 pour reste.

Ce reste, est ce qu'on appelle le *Complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette manière, étant trop simple, pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat, de l'addition & de la soustraction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération, à l'addition. Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 672736, 426452, & de retrancher de leur somme, les deux nombres 432752, 18675; ce qui exige deux additions & une soustraction; je substitue à cette opération, la suivante

	672736
	426452
Complément arithmétique de 432752 ..	567248
Complément arithmétique de 18675 ..	981325
Somme...........	2647761

c'est-à-dire, que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, & les complémens arithmétiques

des deux derniers : la fomme eft 2647761. Il faut en fupprimer le premier chiffre 2 ; & les chiffres reftans 647761 font le réfultat cherché.

La raifon de cette opération eft facile à fentir, en remarquant que fi au lieu de retrancher 432752, comme on le propofoit, j'ajoute fon complément arithmétique, c'eft-à-dire, 1000000 moins 432752 ; je fais en même temps la fouftraction propofée, & une augmentation de 1000000, c'eft-à-dire, d'une dixaine au premier chiffre du réfultat ; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du réfultat.

L'application de ceci, aux logarithmes, eft évidente.

Qu'il foit queftion, par exemple, de divifer 3760, par 79. Il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris

log. 3760	3,575188
complt. arith. du log. de 79	8,102373
Somme	11,677561

Ainfi, 1,677561 eft le logarithme du quotient, & répond à 47,59 à moins d'un centième près.

Suppofons, pour fecond exemple, qu'il foit queftion de multiplier $\frac{675}{527}$, par $\frac{952}{377}$; il faudroit (106) multiplier 675, par 952; & 527, par 377; puis divifer le premier produit, par le fecond. Par logarithmes, on opérera ainfi...................

log. 675........................	2,829304
log. 952........................	2,978637
compl^t. arith. du log. de 527	7,278189
compl^t. arith. du log. de 377	7,423659
Somme...........	20,509789

le logarithme du produit eft donc 0,509789, qui cherché avec trois unités de plus à la caractériftique, répond à 3,234.

On peut faire ufage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions fous la même forme que ceux des nombres entiers, & les employer de même, dans le calcul; par-là on évitera la diftinction des logarithmes négatifs, & des logarithmes pofitifs. Il fuffira de fe fouvenir, que la caractériftique du logarithme des fractions, proprement dites, eft trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$ qui n'eft (96) autre chofe que 3 divifé par 4; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3; c'eft-à-dire, de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4, & de donner au refte le figne — (235);

au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4;

log. 3	0,477121
complt. arith. du log. 4	9,397940
Somme....	9,875061

Cette somme eſt le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractériſtique eſt trop forte de 10 unités. Or il n'eſt pas néceſſaire de faire actuellement la diminution ; on peut la rejetter à la fin des opérations dans leſquelles on emploiera ce logarithme.

La même règle s'applique aux fractions décimales: ainſi pour avoir le logarithme de 0,575, qui n'eſt autre choſe que $\frac{575}{1000}$; au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arith. du logarithme de 1000.

En employant ainſi, les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en eſt pas plus difficile de trouver dans les Tables, les valeurs, en décimales, de ces mêmes fractions. Dès que je ſaurai qu'un logarithme propoſé, eſt, ou renferme un ou pluſieurs complémens arithmétiques; je ſais que ſa caractériſtique eſt trop forte, d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques; ainſi ſi elle paſſe ce nombre de dixaines, il ſera facile de la diminuer, & de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, & qui ſera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais si la caractéristique est au-dessous du nombre des dixaines qu'elle est censée renfermer de trop; elle appartient certainement à une fraction, que je trouverai en cette manière: je chercherai, par ce qui a été dit (242 *& suiv.*) à quel nombre répond le logarithme proposé; & lorsque je l'aurai trouvé, j'en séparerai, par une virgule, autant de dixaines de chiffres sur la droite, qu'il y aura de dixaines de trop, dans la caractéristique.

Par exemple, si l'on me donnoit 8,7322235 pour logarithme résultant d'une opération dans laquelle il est entré un complément arithmétique. Je vois, puisque sa caractéristique est au-dessous d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord (243) à quel nombre répond 8,7322235, considéré comme logarithme de nombre entier; je trouve qu'il répond à 539802600; séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802600 pour valeur très-approchée, de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un tel degré de précision, on abrégera, en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celle des Tables; & prenant seulement le nombre correspondant, on séparera autant de chiffres de moins que ne le prescrit la règle

précédente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique. Ainsi, dans le cas présent, je diminuerois la caractéristique, de 5 unités, & ayant trouvé que le nombre correspondant, est 5398, j'en séparerois seulement cinq chiffres, & j'aurois 0,05398.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer, qu'en multipliant (229) le logarithme, par le nombre qui marque le degré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte. Ainsi, en élevant au cube, par exemple; s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé; c'est-à-dire, si la caractéristique est trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube, sera trop forte, de 30 unités; & ainsi des autres. Il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur.

Dans les extractions des racines; pour éviter toute méprise, lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage; on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique autant de dixaines qu'il est nécessaire, pour que ce dont elle sera trop forte, soit précisément d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine: & ayant, conformément à la règle ordinaire, divisé par le nombre

qui marque le degré de la racine, la caractéristique sera trop forte, précisément de 10 unités.

Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547............

log. 276........................	2,440909
complt. arithmétique du log. de 547 ..	7,262013
Somme...........	9,702922
à la caractéristique de laquelle j'ajoute.	20,
	29,702922

afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines; & j'ai 29,702922 dont le tiers 9,900974 est le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec dix unités de trop à la caractéristique; ainsi, conformément à ce qui a été observé ci-dessus, je trouve que cette racine cubique est 0,7961 à moins d'un millième près.

L'usage des complémens arithmétiques, est principalement utile dans les calculs de la Trigonométrie, & par conséquent dans plusieurs des opérations du pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.



EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÊMIE DES SCIENCES,

Du 21 Novembre 1764.

M.rs CLAIRAUT & D'ALEMBERT, qui avoient été nommés pour examiner un *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine*, par M. BÉZOUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression ; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 21 Novembre 1764.

Signé *GRANDJEAN DE FOUCHY*,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

De l'Imprimerie de STOUPE, rue de la Harpe.

